

第4章 正弦交流电路

第四章 正弦交流电路

4.1 正弦交流电的基本概念

4.2 电阻、电感、电容元件的交流电路

4.3 交流电路分析

4.4 功率与功率因数的提高

4.5 谐振电路

4.1 正弦交流电的基本概念

正弦量： 随时间按正弦规律做周期变化的量。

正弦交流电路是指含有正弦电源而且电路各部分所产生的电压和电流(响应)均按正弦规律变化的电路。

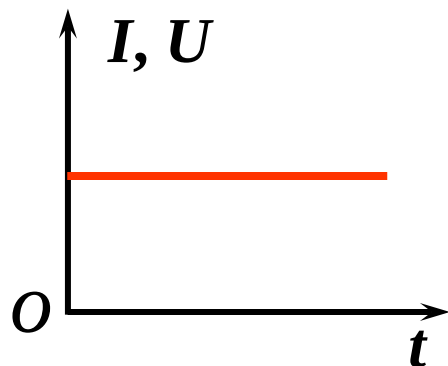
交流电路
的分类

- 单相正弦交流电路(第四章)
- 三相正弦交流电路(第五章)
- 非正弦交流电路(第四章)

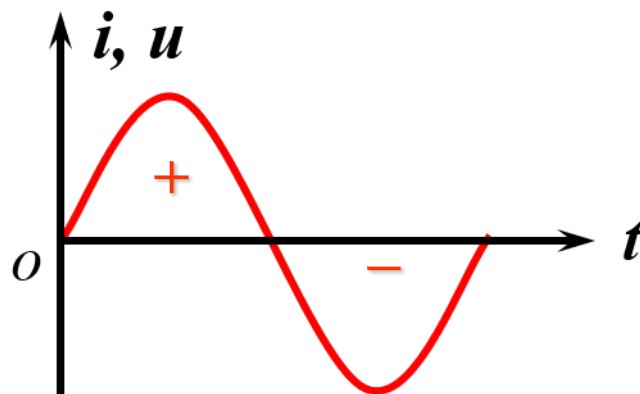
交流电路与直流电路的最主要差别：具有相位差

交流电路的分析方法：

用相量表示后，即可用直流电路的分析方法。



直流电流和电压



正弦电流和电压

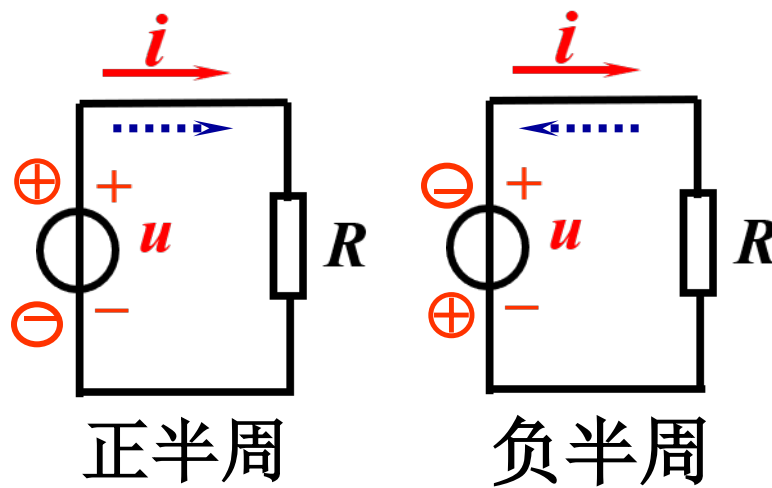
正弦交流电的优越性:

便于传输; 易于变换

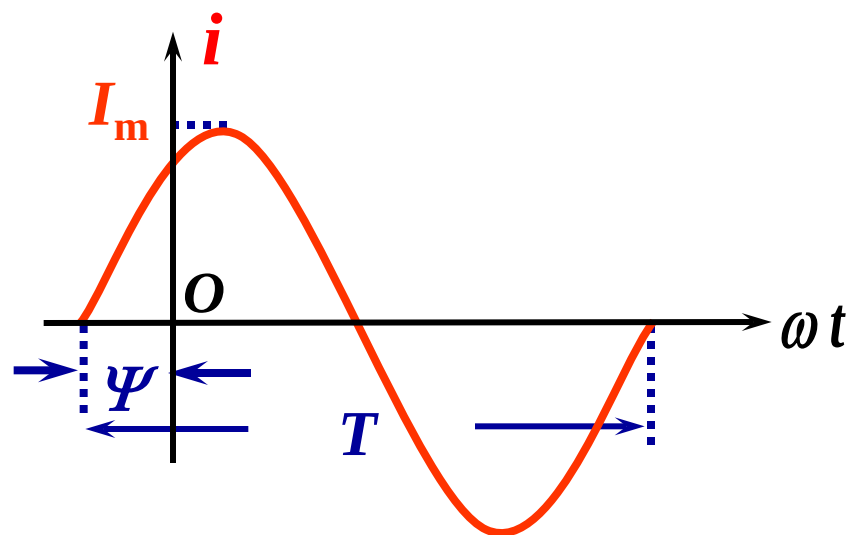
便于运算;

有利于电器设备的运行;

...



设正弦交流电流：



$$i = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

初相角：决定正弦量起始位置

角频率：决定正弦量变化快慢

幅值：决定正弦量的大小

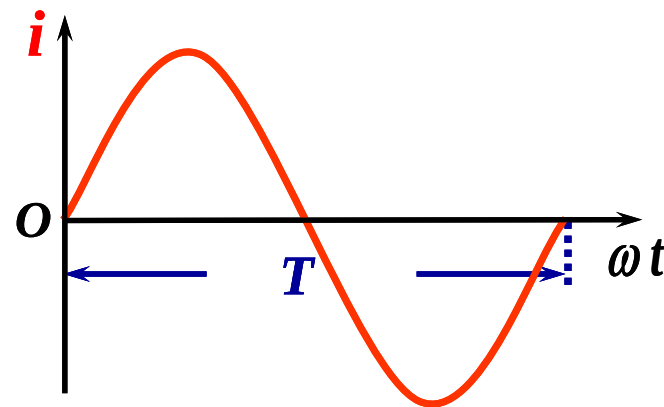
幅值、角频率、初相角成为正弦量的三要素。

1 频率与周期

周期 T : 正弦量变化一周所需的时间 (s)

频率 f : $f = \frac{1}{T}$ (Hz)

角频率 ω : $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ (rad/s)



- * **电网频率**: 我国 50 Hz , 美国、日本 60 Hz
- * **高频炉频率**: 200 ~ 300 kHz (**中频炉** 500 ~ 8000 Hz)
- * **收音机中频段频率**: 530~1600 kHz
- * **移动通信频率**: 900MHz~1800 MHz
- * **无线通信频率**: 高达 300GHz

2 幅值与有效值

幅值: I_m 、 U_m 、 E_m

幅值大写,下标加 m

有效值:

与交流热效应相等的直流定义为交流电的有效值。

有效值
必须大写

$$\int_0^T \frac{i^2 R dt}{\text{交流}} = \frac{I^2 RT}{\text{直流}}$$

$$\begin{aligned} \text{则有 } I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} \\ &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

交流电压、电流表测量
数据为有效值。

$$\text{同理: } U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

交流设备名牌标注的电
压、电流均为有效值

3 初相位与相位差

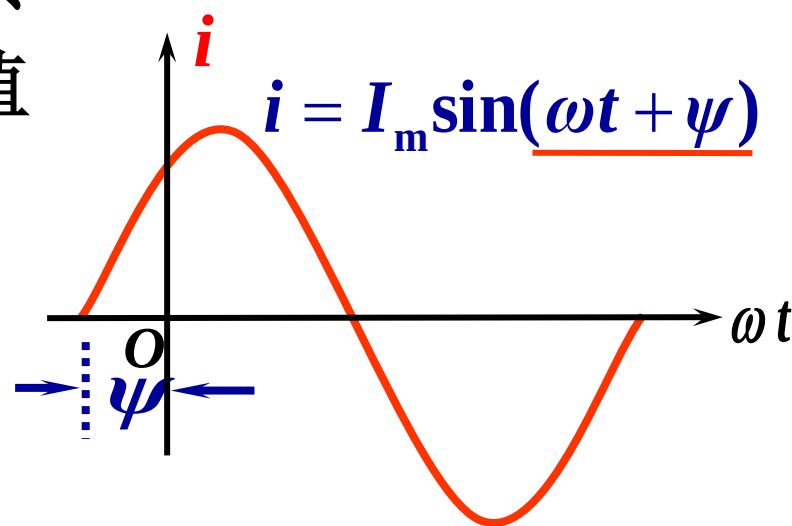
正弦量所取计时起点不同，其初始值($t=0$)时的值及到达幅值或某一特定时刻的值就不同。

相位： $\omega t + \psi$

反映正弦量变化的进程。

初相位： 表示正弦量在 $t=0$ 时的相角。

$$\psi = (\omega t + \psi) \Big|_{t=0}$$



ψ ： 给出了观察正弦波的起点或参考点。

相位差 φ

两同频率的正弦量之间的初相位之差。

如: $u = U_m \sin(\omega t + \psi_1)$

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_2)$$

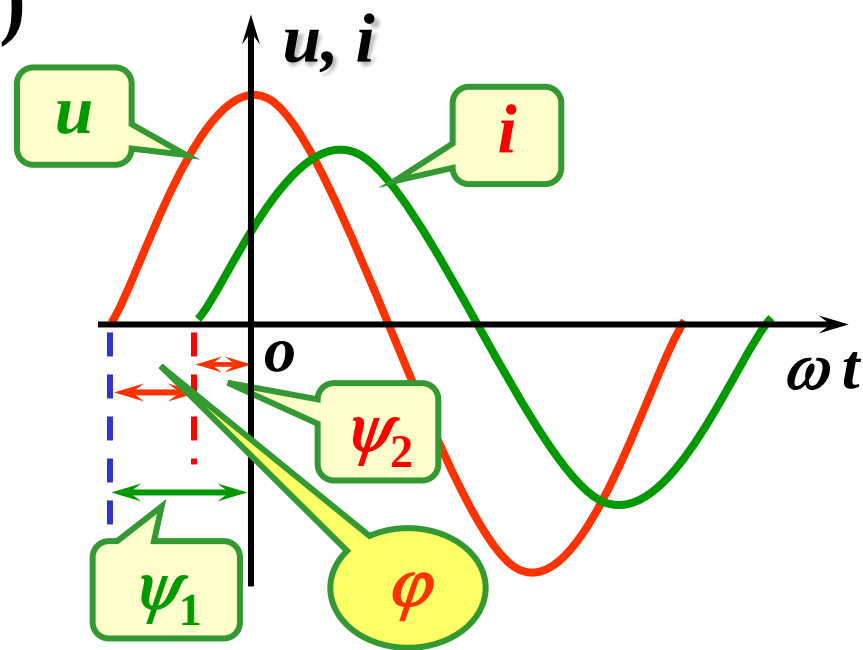
$$\begin{aligned}\varphi &= (\omega t + \psi_1) - (\omega t + \psi_2) \\ &= \psi_1 - \psi_2\end{aligned}$$

图中

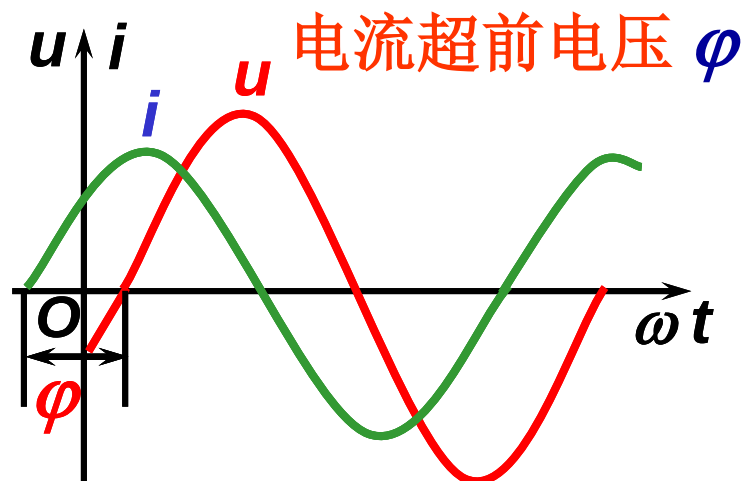
$$\varphi = \psi_1 - \psi_2 > 0$$

电压超前电流 φ

或称 i 滞后 u , φ 角

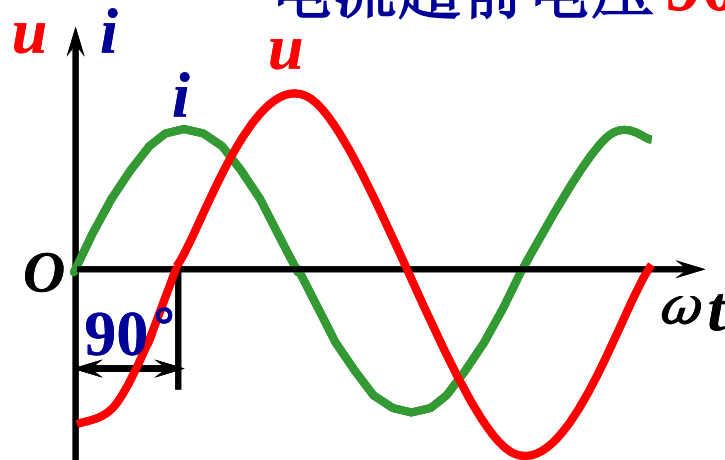


$$\varphi = \psi_1 - \psi_2 < 0$$



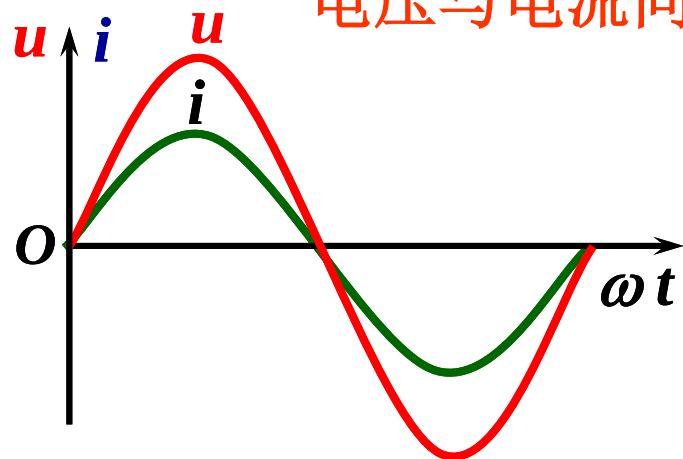
$$\varphi = \psi_1 - \psi_2 = -90^\circ$$

电流超前电压 90°



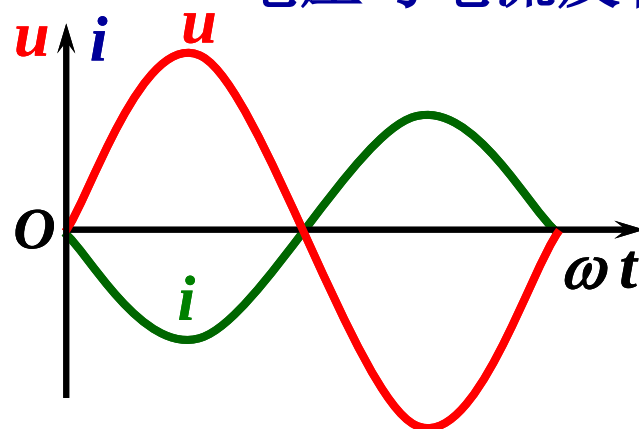
$$\varphi = \psi_1 - \psi_2 = 0$$

电压与电流同相



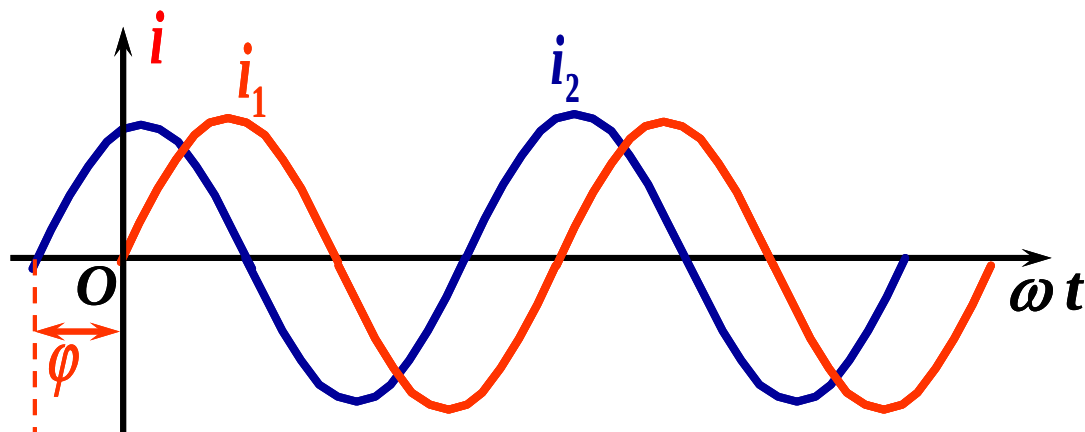
$$\varphi = \psi_1 - \psi_2 = 180^\circ$$

电压与电流反相



注意：

(1) 两同频率的正弦量之间的相位差为常数，与计时的选择起点无关。

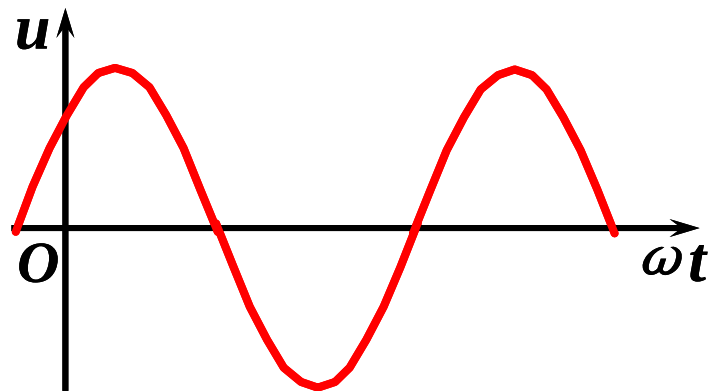


(2) 不同频率的正弦量比较无意义。

正弦量的相量表示法

1. 正弦量的表示方法

波形图



瞬时值表达式 $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$

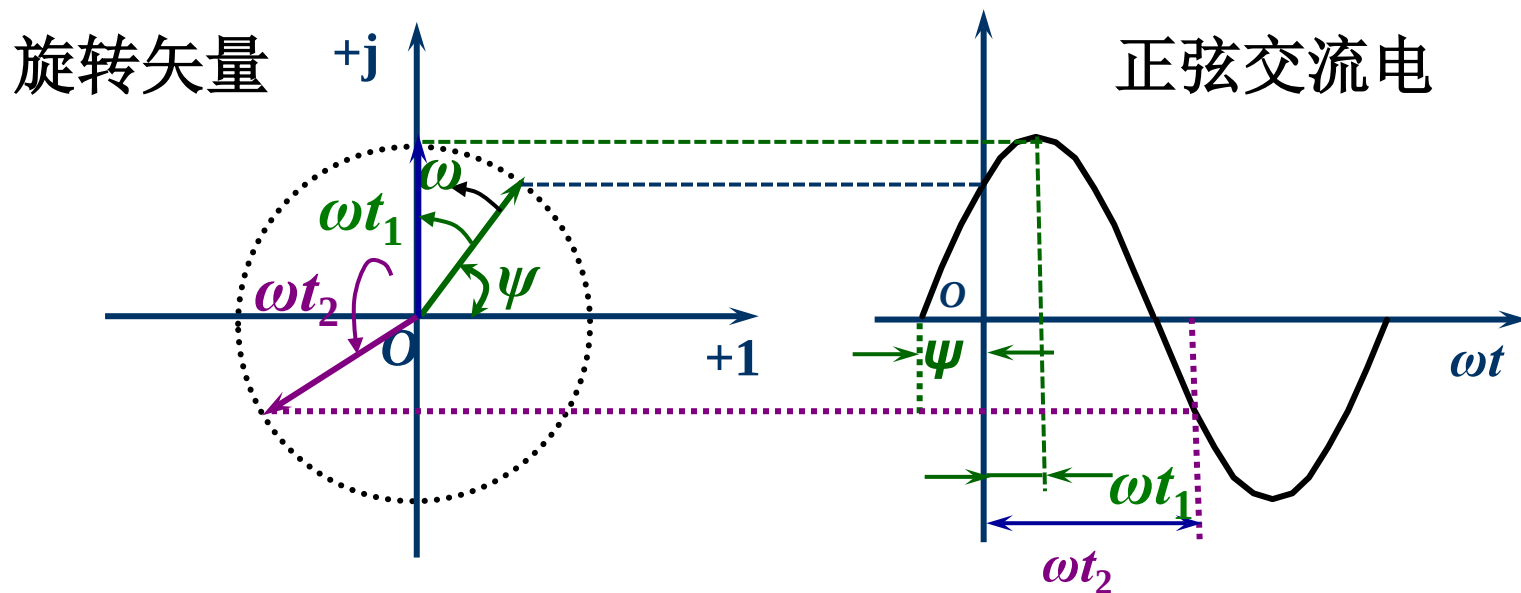
相量 $\dot{U} = U \angle \psi$

必须
小写

重点

前两种不便于运算，重点介绍相量表示法。

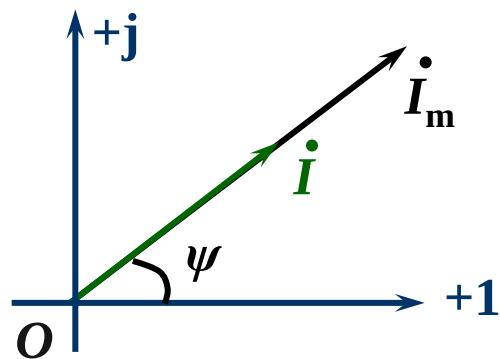
2. 正弦量的相量表示



● 正弦交流电可以用
一个**固定矢量**表示

● **最大值相量** $\dot{I}_m$

● **有效值相量** $\dot{I}$

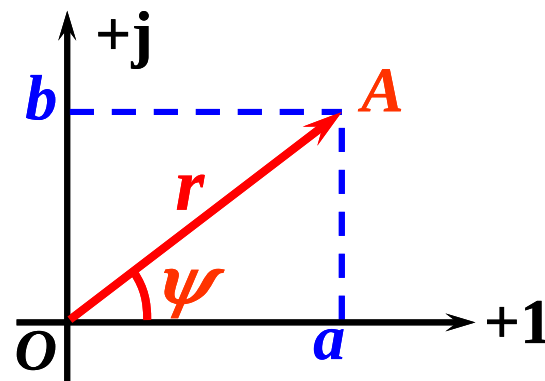


2. 正弦量的相量表示

实质：用复数表示正弦量

(1) 复数表示形式

设 A 为复数



① 代数式 $A = a + \mathbf{j}b$ 式中： $a = r \cos \psi$

$$b = r \sin \psi$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \psi = \arctan \frac{b}{a} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{复数的模} \\ \text{复数的辐角} \end{array}$$

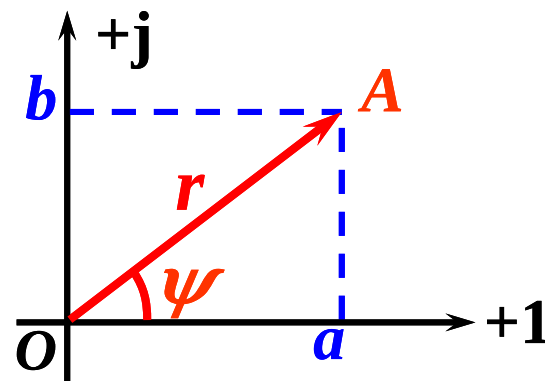
② 三角式 $A = r \cos \psi + \mathbf{j} r \sin \psi = r (\cos \psi + \mathbf{j} \sin \psi)$

2. 正弦量的相量表示

实质：用复数表示正弦量

(1) 复数表示形式

设 A 为复数



① 代数式 $A = a + jb$

② 三角式 $A = r \cos \psi + j r \sin \psi = r (\cos \psi + j \sin \psi)$
$$e^{j\psi} = \cos \psi + j \sin \psi$$

③ 指数式 $A = r e^{j\psi}$

④ 极坐标式 $A = r \angle \psi$

$$A = a + jb = r \cos \psi + j r \sin \psi = r e^{j\psi} = r \angle \psi$$

(2) 正弦量的相量表示

复数: $A = \underline{r e^{j\psi}}$

正弦量: $\underline{u = U_m \sin(\omega t + \psi)}$

复数由模和辐角两个特征来确定;

正弦量由幅值、角频率、初相角三个特征来确定;

同频率的正弦量, 频率是已知的, 可以不考虑;

一个正弦量由幅值/有效值)和初相位确定。

正弦量可用复数表示

相量: 表示正弦量的复数称相量

相量：表示正弦量的复数称相量

{ 复数的模即为正弦量的幅值/有效值
复数的辐角即为正弦量的初相角

关于相量运算 加减运算时用代数式
乘除运算时用指数式

设正弦量： $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$

电压的有效值相量

相量表示：

$\dot{U} = U e^{j\psi} = U \angle \psi$ { 相量的模=正弦量的有效值
相量辐角=正弦量的初相角

或： $\dot{U}_m = U_m e^{j\psi} = U_m \angle \psi$ { 相量的模=正弦量的最大值
相量辐角=正弦量的初相角

电压的幅值相量

注意:

(1) 相量只是表示正弦量，而不等于正弦量。

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) \neq I_m e^{j\psi} = I_m \angle \psi$$

正弦量是时间的函数，而相量仅仅是表示正弦量的复数，两者不能划等号！

(2) 只有正弦量才能用相量表示。

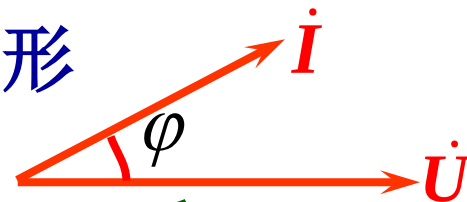
(3) 相量的两种表示形式

相量式: $\dot{U} = U e^{j\psi} = U \angle \psi = U(\cos \psi + j \sin \psi)$

相量图: 把相量表示在复平面的图形

只有同频率的正弦量才能画

在同一相量图上。



可不画坐标轴

(4) 正弦量表示符号的说明

瞬时值 — 小写 (u, i)

有效值 — 大写 (U, I)

最大值 — 大写+下标 (U_m, I_m)

相 量 — 大写 + “.”

$\dot{U}_m, \dot{I}_m$ — 最大值相量

$\dot{U}, \dot{I}$ — 有效值相量)

(5) “j”的数学意义和物理意义

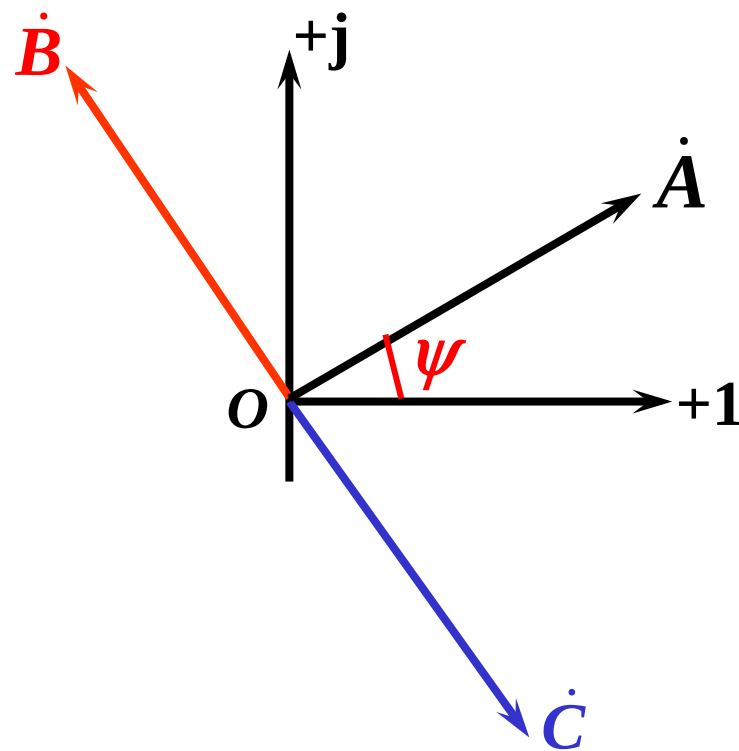
旋转 90° 因子: $e^{\pm j90^\circ}$

$$e^{\pm j90^\circ} = \cos 90^\circ \pm j \sin 90^\circ = \pm j$$

设相量 $\dot{A} = r e^{j\psi}$

相量 $\dot{A}$ 乘以 e^{j90° , $\dot{A}$ 将
逆时针旋转 90° , 得到 $\dot{B}$

相量 $\dot{A}$ 乘以 e^{-j90° , $\dot{A}$ 将
顺时针旋转 90° , 得到 $\dot{C}$



正误判断

1.已知:

$$u = 220 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{V}$$

$$\dot{U} \neq \frac{220}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ \text{V}$$

有效值

$$\dot{U}_m \neq 220 e^{j45^\circ} \text{V}$$

2.已知: $i = 10 \angle 60^\circ \text{A}$

$$i \neq 10 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{A}$$

最大值

3.已知:

$$\dot{I} = 4 e^{j30^\circ} \text{A}$$

复数

$$\neq 4\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \text{A}$$

瞬时值

4.已知:

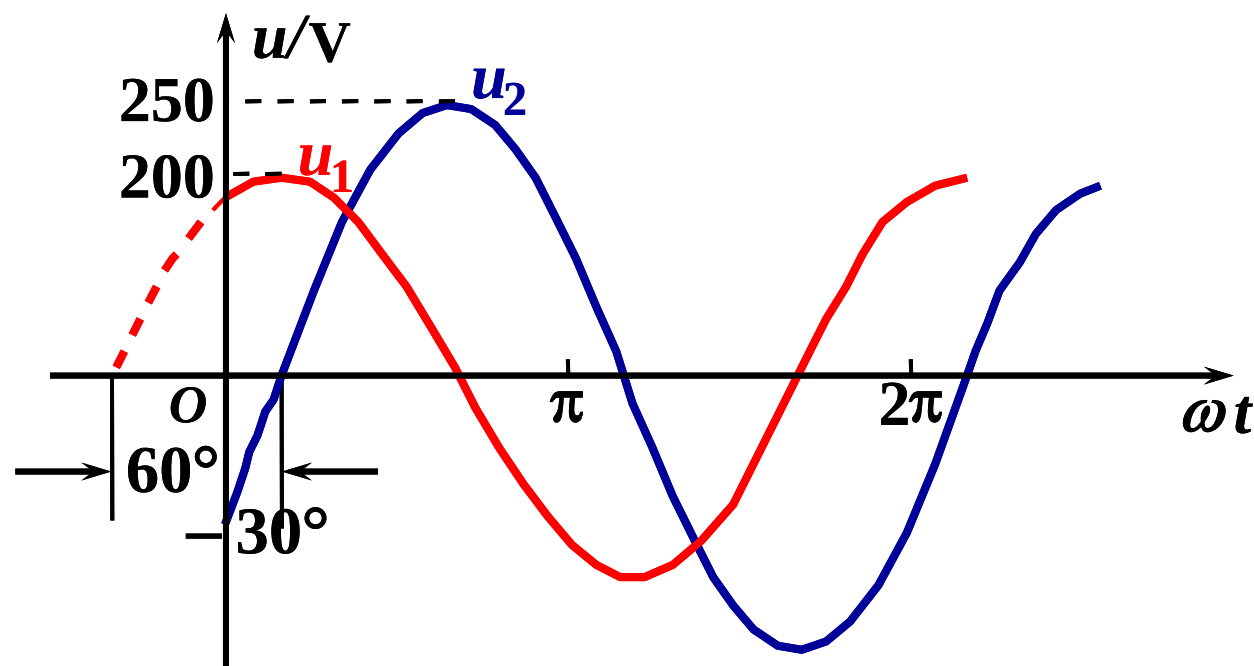
$$\dot{U} = 100 \angle -15^\circ \text{V}$$

$$U \checkmark = 100 \text{V}$$

负号

$$\dot{U} \neq 100 e^{j15^\circ} \text{V}$$

例 1: 已知选定参考方向下正弦量的波形图如图所示, 试写出正弦量的表达式。 䄑



解:

$$u_1 = 200 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ V}$$

$$u_2 = 250 \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ V}$$

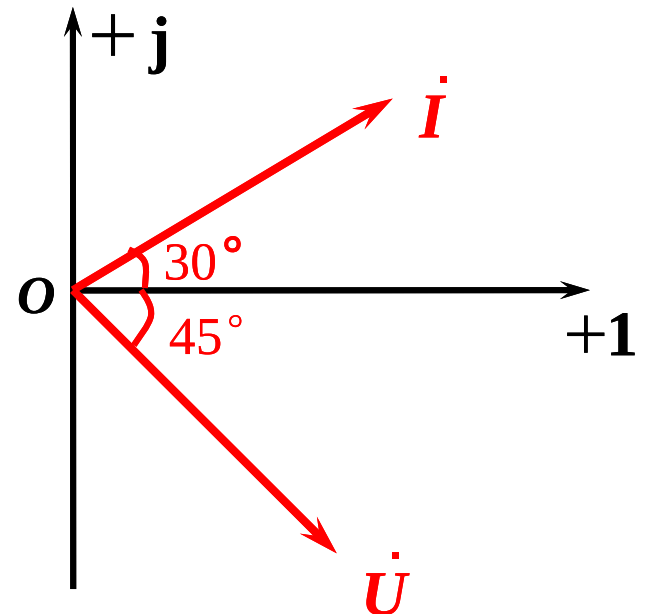
例 2: 已知同频率的正弦量的解析式分别为
 $i = 10\sin(\omega t + 30^\circ) \text{ A}$, $u = 220\sqrt{2}\sin(\omega t - 45^\circ) \text{ V}$, 写出电流和电压的相量 $\dot{I}$ 、 $\dot{U}$, 并绘出相量图。

解: (1) 相量式

$$\dot{I} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ = 5\sqrt{2} \angle 30^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U} = \frac{220\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ \text{ V}$$

(2) 相量图



例3: 已知 $i_1 = 12.7\sqrt{2} \sin(314t + 30^\circ) \text{ A}$

$$i_2 = 11\sqrt{2} \sin(314t - 60^\circ) \text{ A}$$

求: $i = i_1 + i_2$ 。

解: $\dot{I}_1 = 12.7 \angle 30^\circ \text{ A}$ $\dot{I}_2 = 11 \angle -60^\circ \text{ A}$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 12.7 \angle 30^\circ \text{ A} + 11 \angle -60^\circ \text{ A}$$

$$= 12.7(\cos 30^\circ + j\sin 30^\circ) \text{ A} + 11(\cos 60^\circ - j\sin 60^\circ) \text{ A}$$

$$= (16.5 - j3.18) \text{ A} = 16.8 \angle -10.9^\circ \text{ A}$$

$$i = 16.8 \sqrt{2} \sin(314t - 10.9^\circ) \text{ A}$$

有效值 $I = 16.8 \text{ A}$

4.2 电阻、电感、电容元件的交流电路

4.2.1 电阻元件的交流电路

1. 电压与电流的关系

根据欧姆定律: $u = iR$

设 $u = U_m \sin \omega t$

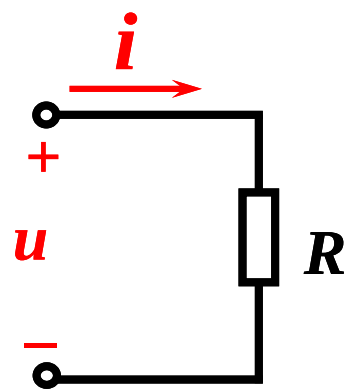
$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m \sin \omega t}{R} = \frac{\sqrt{2}U}{R} \sin \omega t$$

$$= I_m \sin \omega t = \sqrt{2} I \sin \omega t$$

(1) 频率相同

(2) 大小关系: $I = \frac{U}{R}$

(3) 相位关系: u 、 i 相位相同 ($\varphi = 0$) $\dot{U} = U \angle 0^\circ = \dot{I}R$



相量式: $\dot{I} = I \angle 0^\circ$

2. 功率关系

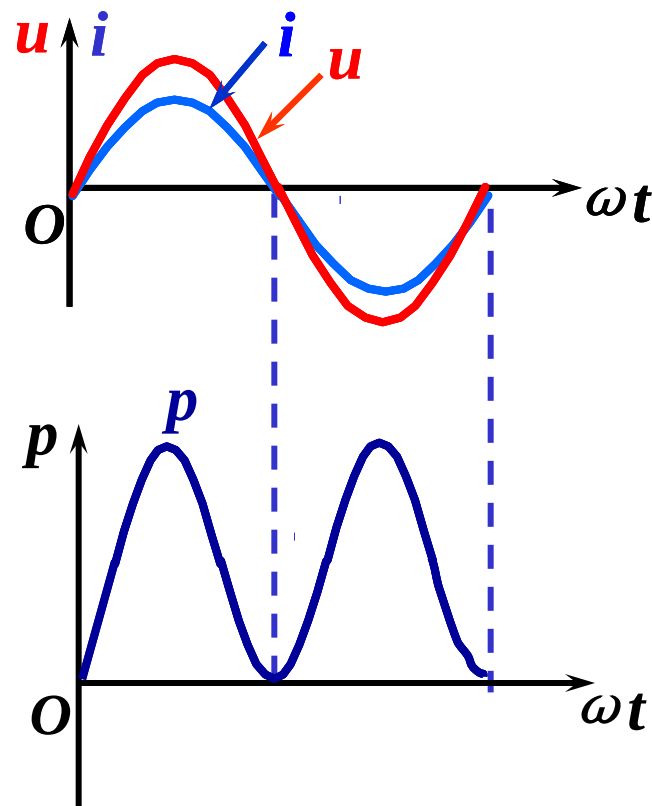
(1) 瞬时功率 p : 瞬时电压与瞬时电流的乘积

$$i = \sqrt{2} I \sin \omega t$$

$$u = \sqrt{2} U \sin \omega t$$

小写

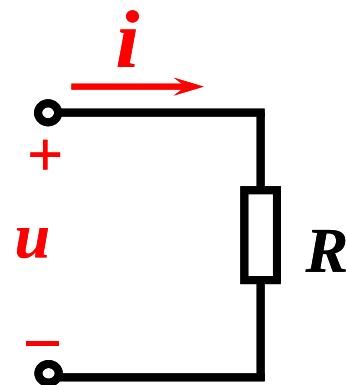
$$\begin{aligned} p &= u \cdot i \\ &= U_m I_m \sin^2 \omega t \\ &= \frac{1}{2} U_m I_m (1 - \cos 2\omega t) \end{aligned}$$



结论: $p \geq 0$ (耗能元件), 且随时间变化。

(2) 平均功率(有功功率) P

瞬时功率在一个周期内的平均值

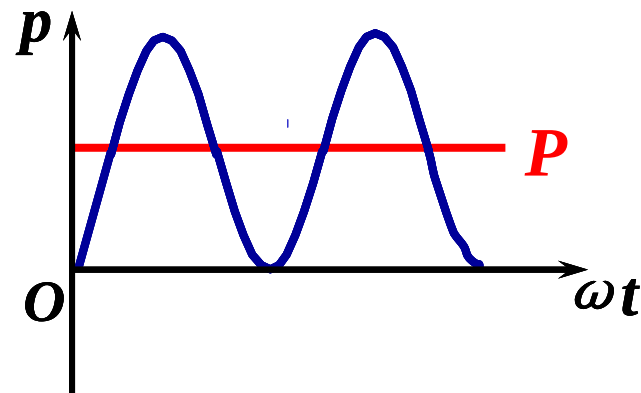


大写

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} U_m I_m (1 - \cos 2\omega t) \, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T UI (1 - \cos 2\omega t) \, dt = UI$$



$$P = U \times I = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad \text{单位:瓦 (W)}$$

注意：通常铭牌数据或测量的功率均指有功功率。

例：一只额定电压为220V，功率为 100W的电烙铁，误接在380V的交流电源上，问此时它接受的功率为多少？是否安全？若接到110V的交流电源上，功率又为多少？

解：由电烙铁的额定值可得

$$R = \frac{U_R^2}{P} = \frac{220^2}{100} = 484\Omega$$

当电源电压为 380V时，电烙铁的功率为

$$P_1 = \frac{U_R^2}{R} = \frac{380^2}{484} = 298\text{W} > 100\text{W}$$

不安全，电烙铁将被烧坏。

例：一只额定电压为220V，功率为 100W的电烙铁，误接在380V的交流电源上，问此时它接受的功率为多少？是否安全？若接到110V的交流电源上，功率又为多少？

解： $R = \frac{U_R^2}{P} = \frac{220^2}{100} = 484\Omega$

当接到110 V的交流电源上，时电烙铁的功率为

$$P_2 = \frac{U_R^2}{R} = \frac{110^2}{484} = 25\text{W} < 100\text{W}$$

此时电烙铁达不到正常的使用温度。

4.2.2 电感元件的交流电路

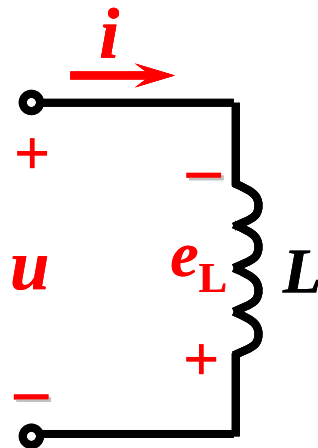
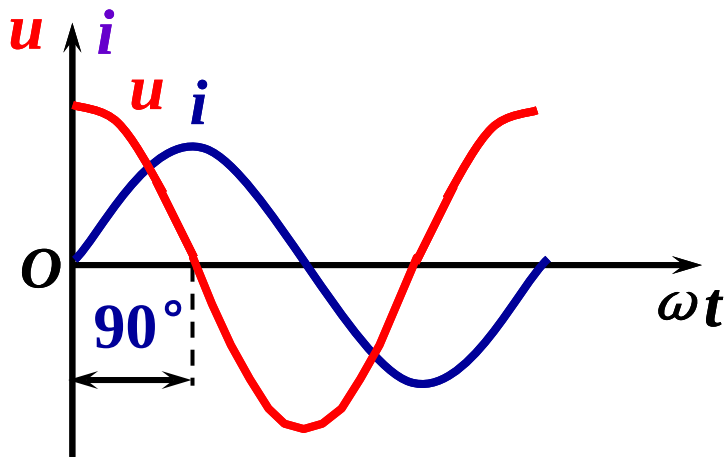
1. 电压与电流的关系

基本关系式: $u = -e_L = L \frac{di}{dt}$

设: $i = \sqrt{2} I \sin \omega t$

$$u = L \frac{d(I_m \sin \omega t)}{dt} = \sqrt{2} \underline{I \omega L} \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$= \sqrt{2} \underline{U} \sin(\omega t + 90^\circ)$$



(1) 频率相同

(2) $U = I \omega L$

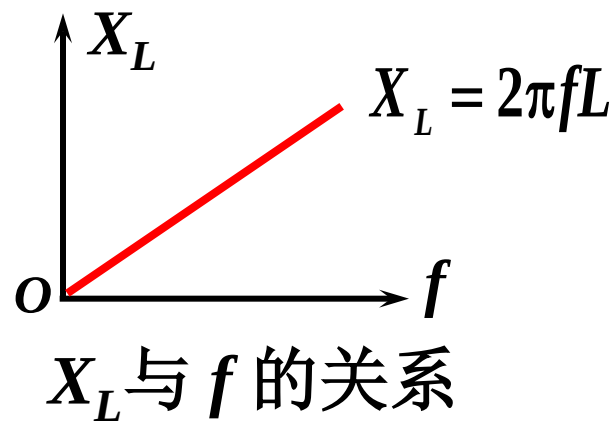
(3) 电压超前电流 90°

相位差 $\varphi = \psi_u - \psi_i = 90^\circ$

定义:

感抗: $X_L = \omega L = 2\pi f L$ (Ω)

则: $U = I\omega L = I X_L$

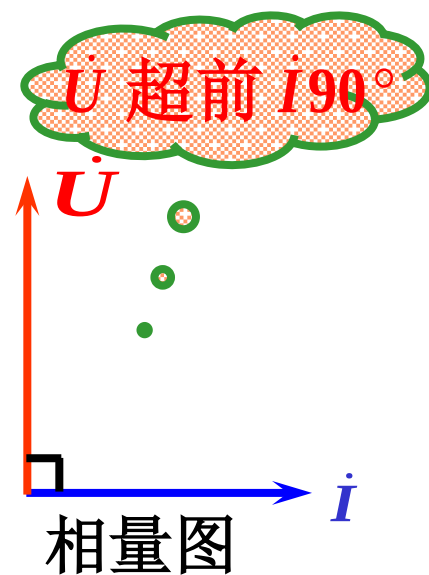


$X_L = 2\pi f L$ { 直流: $f = 0, X_L = 0$, 电感 L 视为短路
交流: $f \uparrow \rightarrow X_L \uparrow$

$\therefore$ 电感 L 具有通直阻交的作用

相量式: $\dot{U} = j\dot{I} \omega L = \dot{I} \cdot (jX_L)$

电感电路相量形式的欧姆定律



2. 功率关系

$$\begin{cases} i = \sqrt{2}I \sin \omega t \\ u = \sqrt{2}I \omega L \cdot \sin (\omega t + 90^\circ) \end{cases}$$

(1) 瞬时功率

$$\begin{aligned} p &= i \cdot u = U_m I_m \sin \omega t \sin (\omega t + 90^\circ) \\ &= UI \sin 2\omega t \end{aligned}$$

(2) 平均功率

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin (2\omega t) dt = \underline{0}$$

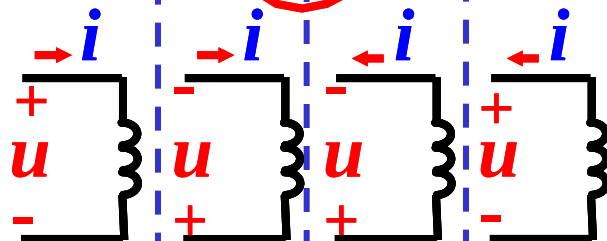
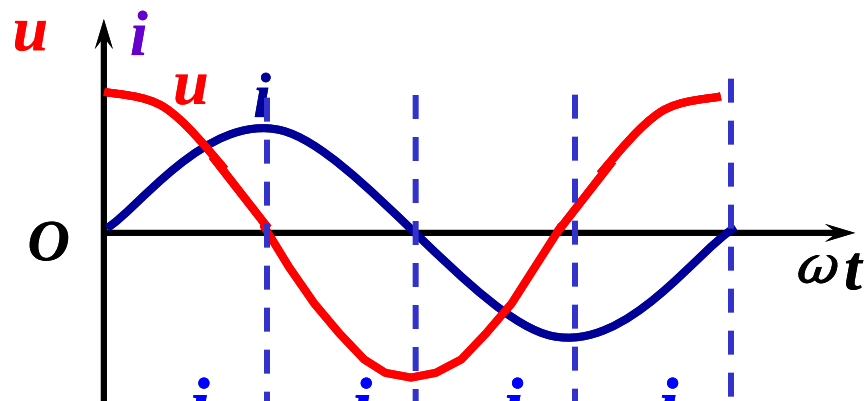
L 是非耗
能元件

(3) 无功功率 Q

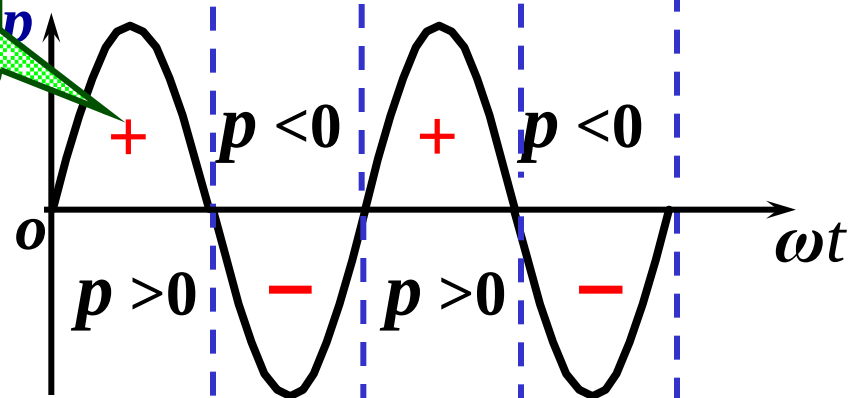
用以衡量电感电路中能量交换的规模。

$$Q = UI = I^2 X_L = \frac{U^2}{X_L} \quad \text{单位: var}$$

分析：瞬时功率： $p = i \cdot u = UI \sin 2\omega t$



可逆的能量
转换过程



储能 放能 储能 放能

结论：
纯电感不消耗
能量，只和电
源进行能量交
换（能量的吞
吐）。

$\therefore$ 电感 L 是储
能元件。

例：把一个0.1H的电感接到 $f=50\text{Hz}$, $U=10\text{V}$ 的正弦电源上，求 I ，如保持 U 不变，而电源 $f = 5000\text{Hz}$ ，这时 I 为多少？

解：(1) 当 $f = 50\text{Hz}$ 时

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times 3.14 \times 50 \times 0.1\Omega = 31.4\Omega$$

$$I = \frac{U}{X_L} = \frac{10}{31.4} = 318\text{mA}$$

(2) 当 $f = 5000\text{Hz}$ 时

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times 3.14 \times 5000 \times 0.1 = 3140\Omega$$

$$I = \frac{U}{X_L} = \frac{10}{3140} = 3.18\text{mA}$$

所以电感元件具有通低频阻高频的特性

4.2.3 电容元件的交流电路

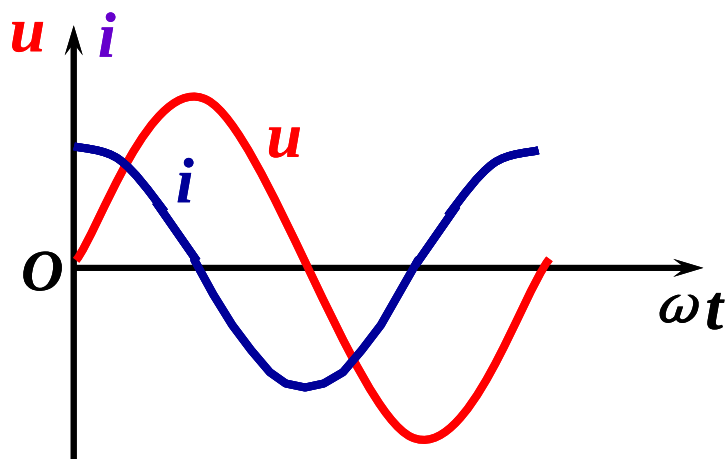
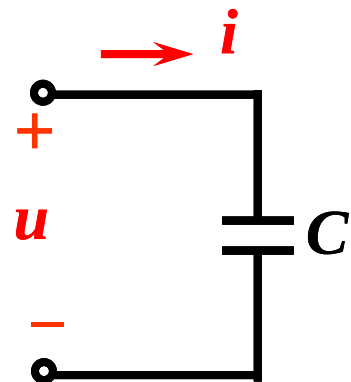
1. 电流与电压的关系

基本关系式: $i = C \frac{du}{dt}$

设: $u = \sqrt{2} U \sin \omega t$

则: $i = C \frac{du}{dt} = \sqrt{2} UC \omega \cos \omega t$

$$= \sqrt{2} U \omega C \sin(\omega t + 90^\circ)$$



(1) 频率相同

(2) $I = U \omega C$ 或 $\frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}$

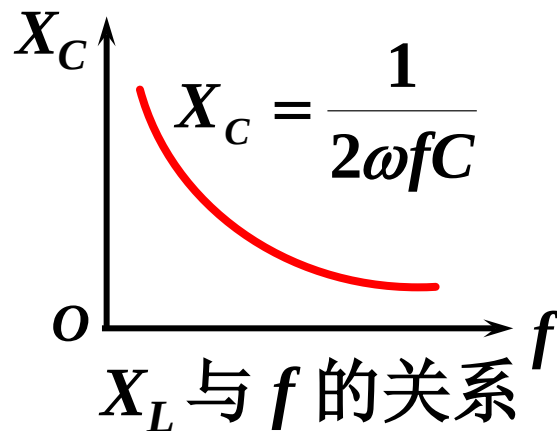
(3) 电流超前电压 90°

相位差 $\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^\circ$

定义:

容抗

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (\Omega)$$



则:

$$U = I \frac{1}{\omega C} = I X_C$$

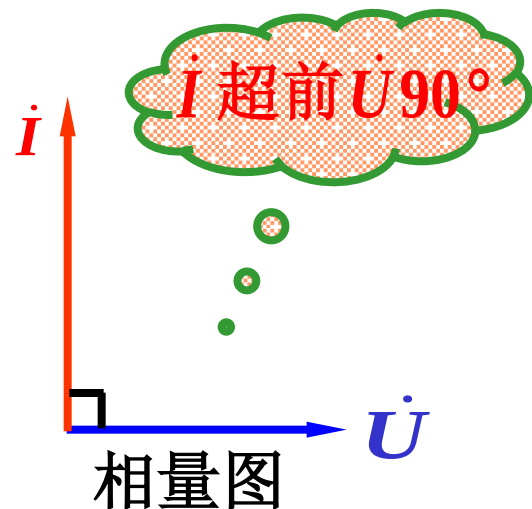
$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} \begin{cases} \text{直流: } X_C \rightarrow \infty, \text{ 电容 } C \text{ 视为开路} \\ \text{交流: } f \uparrow \rightarrow X_C \downarrow \end{cases}$$

所以电容 C 具有隔直通交的作用

相量式

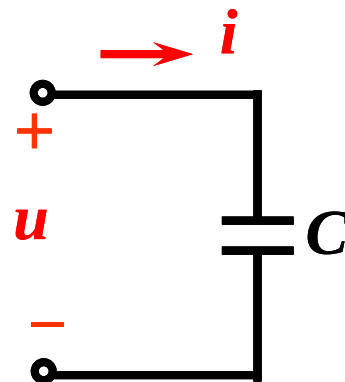
$$\dot{U} = -j\dot{I} \frac{1}{\omega C} = -j\dot{I} X_C$$

电容电路中相量形式的欧姆定律



2. 功率关系

由
$$\begin{cases} u = \sqrt{2}U \sin \omega t \\ i = \sqrt{2}U\omega C \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) \end{cases}$$



(1) 瞬时功率

$$p = u \cdot i = UI \sin 2\omega t$$

(2) 平均功率 P

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin(2\omega t) dt = 0$$

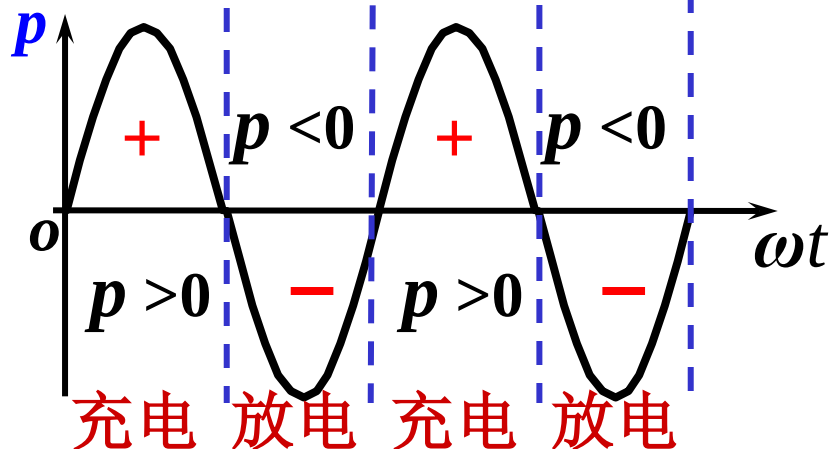
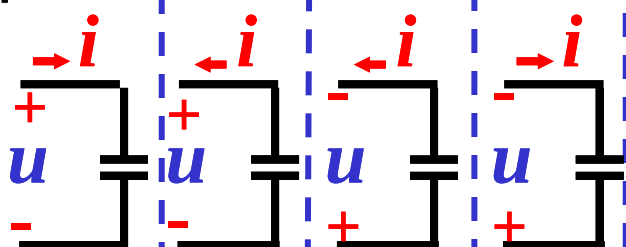
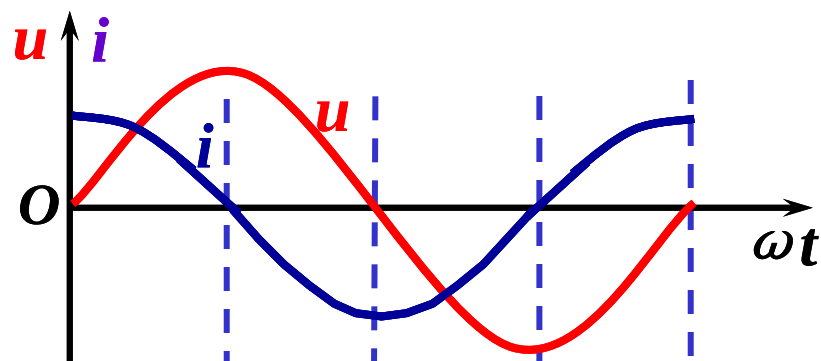
C是非耗
能元件

(3) 无功功率 Q

$$Q = -UI = -I^2 X_C = -\frac{U^2}{X_C}$$

单位: var

瞬时功率 : $p = i \cdot u = UI \sin 2\omega t$



结论:

纯电容不消耗能量, 只和电源进行能量交换 (能量的吞吐)。

所以电容C是储能元件。

例：下图中电容 $C = 23.5 \mu\text{F}$ ，接在电源电压 $U = 220 \text{ V}$ 、频率为 50 Hz 、初相为零的交流电源上，求电路中的电流 i 、 P 及 Q 。该电容的额定电压最少应为多少伏？

解：容抗 $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\omega f C} = 135.5 \Omega$

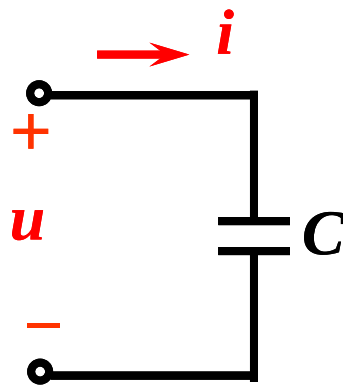
$$I = \frac{U}{X_C} = 1.62 \text{ A}$$

$$i = I_m \sin(\omega t + 90^\circ) = 2.3 \sin(314t + 90^\circ) \text{ A}$$

$$P = 0$$

$$Q = -UI = -356.4 \text{ var}$$

额定电压 $\geq 311 \text{ V}$



单一参数交流电路主要结论列表

参数 \ 项目		电阻	电感	电容
阻抗或电抗		R	$X_L = 2\pi f L$	$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$
u 与 i 的关系	基本关系	$u = iR$	$u = L \frac{di}{dt}$	$i = C \frac{du}{dt}$
	相位关系	u 与 i 同相位	U 超前 i 90°	u 滞后 i 90°
	有效值	$U = IR$	$U = IX_L$	$U = IX_C$
	相量式	$\dot{U} = \dot{I}R$	$\dot{U} = jX_L \dot{I}$	$\dot{U} = -jX_C \dot{I}$
功率	有功功率	$P = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R$	0	0
	无功功率	0	$Q = UI = I^2 X_L = \frac{U^2}{X_L}$	$Q = UI = I^2 X_C = -\frac{U^2}{X_C}$

实际的电阻、电容

电阻的主要指标

1. 标称值
2. 额定功率
3. 允许误差

种类:

碳膜、金属膜、
线绕、可变电阻

电容的主要指标

1. 标称值
2. 耐压
3. 允许误差

种类:

云母、陶瓷、涤纶
电解、可变电容等



一般电阻器、电容器都按标准化系列生产。

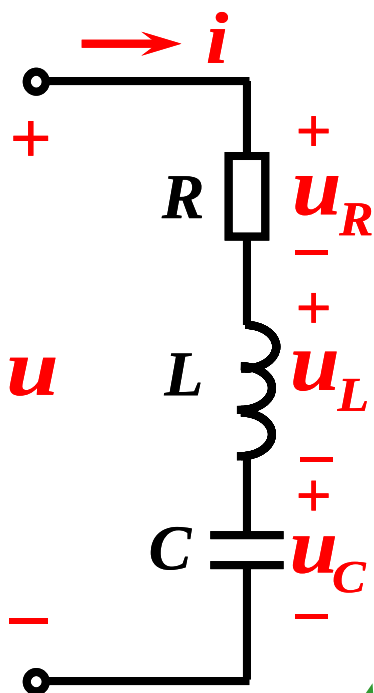
电阻的标称值

误差	± 10% (E12)	± 5% (E24)
标 称 值	1.0、1.2、1.5、 1.8、2.2、2.7、 3.3、3.9、4.7、 5.6、6.8、8.2	1.0、1.1、1.2、1.3、 1.5、1.6、1.8、2.0、 2.2、2.4、2.7、3.0、 3.3、3.6、3.9、4.3、 4.7、5.1、5.6、6.2、 6.8、7.5、8.2、9.1等

电阻的标称值 = 标称值×10ⁿ

电阻、电感、电容串联的交流电路

1. 电流、电压的关系



直流电路两电阻串联时

$$U = IR_1 + IR_2$$

RLC串联交流电路中

$$\text{设: } i = \sqrt{2}I \sin \omega t$$

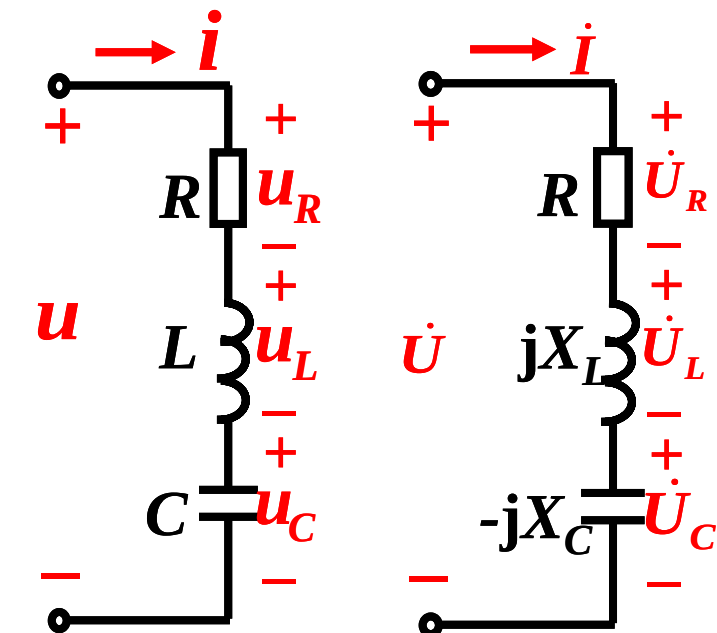
$$U \neq IR + I\omega L + I 1/\omega C$$

交流电路 $\dot{U}$ 、 $\dot{I}$ 与参数 R 、 L 、 C 、 ω 间的关系如何?

讨论

电阻、电感与电容元件串联的交流电路

1. 电流、电压的关系



电路模型

相量模型

总电压与总电流
的相量关系式

(1) 相量式

设 $\dot{I} = I \angle 0^\circ$ (参考相量)

则 $\dot{U}_R = \dot{I}R$

$$\dot{U}_L = \dot{I}(jX_L)$$

$$\dot{U}_C = \dot{I}(-jX_C)$$

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

$$= \dot{I}R + \dot{I}jX_L + \dot{I}(-jX_C)$$

$$= \dot{I}[R + j(X_L - X_C)]$$

根据 $\dot{U} = \dot{I}[R + \mathrm{j}(X_L - X_C)]$

令 $Z = R + \mathrm{j}(X_L - X_C)$ 阻抗

则 $\dot{U} = \dot{I}Z$. . .

复数形式的
欧姆定律

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \angle \psi_u}{I \angle \psi_i} = |Z| \angle \varphi = \frac{U}{I} \angle \psi_u - \psi_i$$

Z 的模表示 u 、 i 的大小关系，辐角（阻抗角）为 u 、 i 的相位差。

注意

Z 是一个复数，不是相量，上面不能加点。

$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| \angle \varphi = \mathbf{R} + \mathbf{j}(X_L - X_C)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{阻抗模: } |\mathbf{Z}| = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ \text{阻抗角: } \varphi = \psi_u - \psi_i = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} = \arctan \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \end{array} \right.$$

★ φ 由电路参数决定。

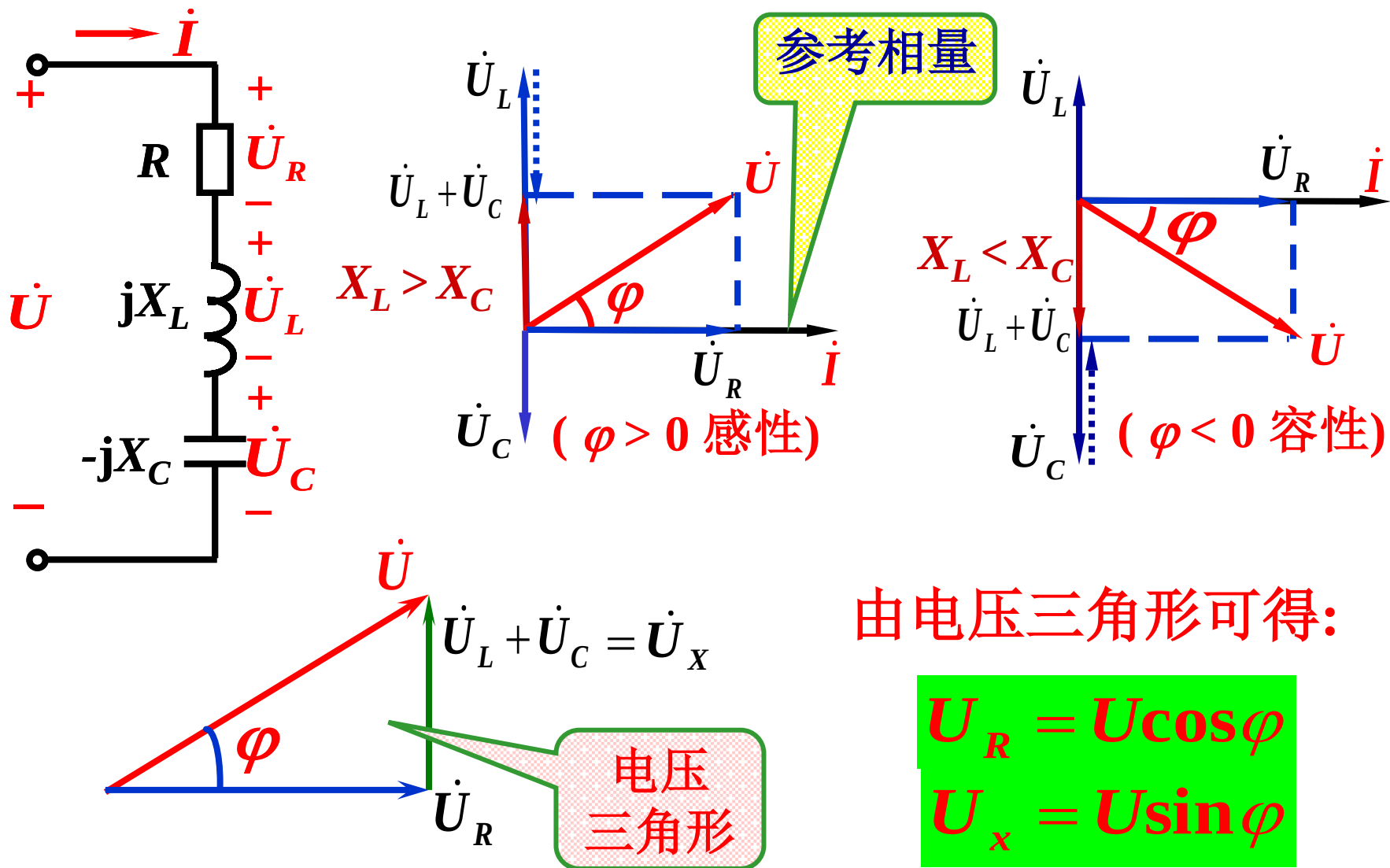
电路参数与电路性质的关系:

当 $X_L > X_C$ 时, $\varphi > 0$, u 超前 i —— 呈感性

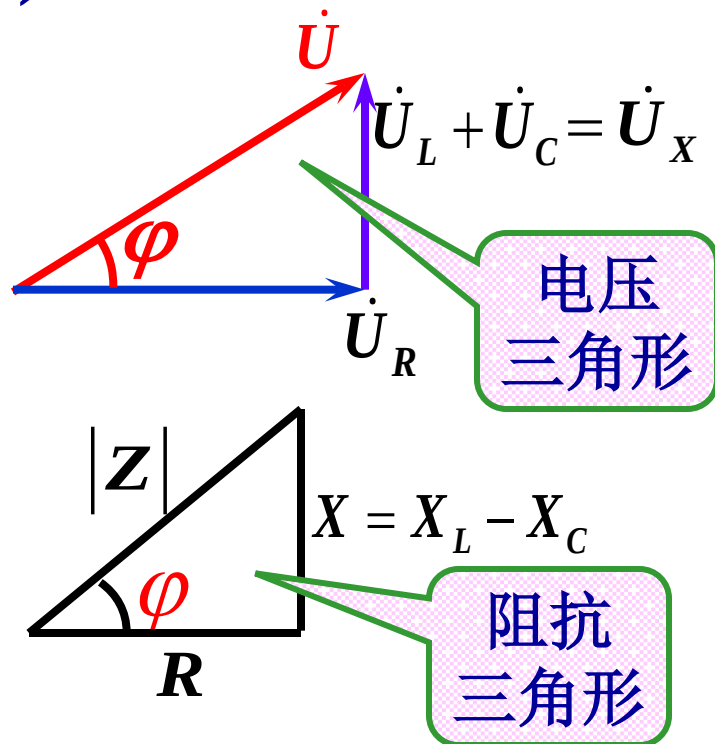
当 $X_L < X_C$ 时, $\varphi < 0$, u 滞后 i —— 呈容性

当 $X_L = X_C$ 时, $\varphi = 0$, u 、 i 同相 —— 呈电阻性

2) 相量图



2) 相量图



由阻抗三角形:

$$R = |Z| \cos \varphi$$

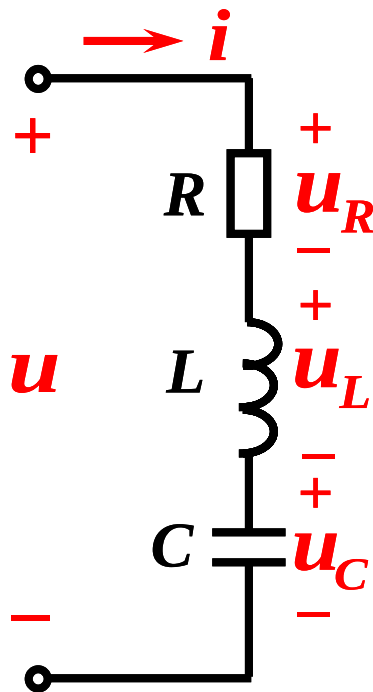
$$X = |Z| \sin \varphi$$

由相量图可求得:

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} \\ &= I \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= I \sqrt{R^2 + X^2} \\ &= I |Z| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{X_L - X_C}{R} \end{aligned}$$

2. 功率关系



(1) 瞬时功率

设: $i = I_m \sin \omega t$

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$p = u \cdot i = U_m \sin(\omega t + \varphi) \cdot I_m \sin \omega t$$

$$= \underbrace{U_m I_m \cos \varphi \sin^2 \omega t}_{\text{耗能元件上的瞬时功率}} + \underbrace{UI \sin \varphi \sin 2\omega t}_{\text{储能元件上的瞬时功率}}$$

在每一瞬间,电源提供的功率一部分被耗能元件消耗掉,一部分与储能元件进行能量交换。

(2) 平均功率 P (有功功率)

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi - UI \cos (2\omega t + \varphi)] dt \\ &= UI \cos \varphi \quad \text{单位: W} \end{aligned}$$

所以 $P = UI \cos \varphi$

总电压

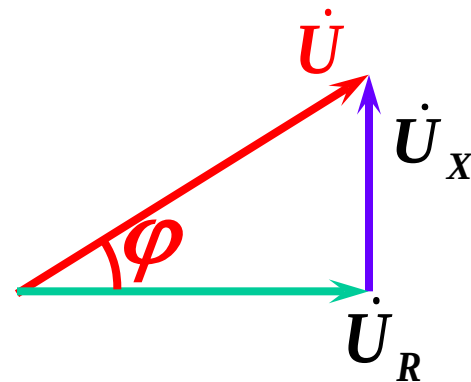
总电流

u 与 i 的夹角

$\cos \varphi$ 称为功率因数，用来衡量对电源的利用程度。

根据电压三角形可得：

$$P = UI \cos \varphi = U_R I = I^2 R$$



电阻消耗
的电能

(3) 无功功率 Q

$$Q = U_L I - U_C I = (U_L - U_C) I = I^2 (X_L - X_C)$$

根据电压三角形可得：

$$Q = UI \sin \varphi \quad \text{单位: var}$$

电感和电容
与电源之间的
能量互换

总电压

总电流

u 与 i 的夹角

(4) 视在功率 S

电路中总电压与总电流有效值的乘积。

$$S = UI = |Z|I^2 \quad \text{单位: } V \cdot A$$

注: $S_N = U_N I_N$ 称为发电机、变压器等供电设备的容量, 可用来衡量发电机、变压器可能提供的最大有功功率。

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad S \neq P + Q$$

P 、 Q 、 S 都不是正弦量, 不能用相量表示。

阻抗三角形、电压三角形、功率三角形

将电压三角形的有效值同除 I 得到阻抗三角形

将电压三角形的有效值同乘 I 得到功率三角形

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

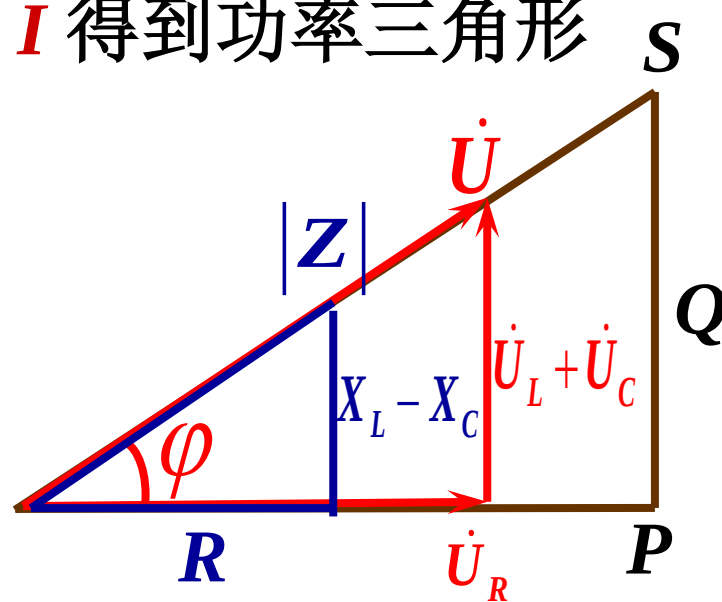
$$U_R = U \cos \varphi$$

$$U_X = U \sin \varphi$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$R = |Z| \cos \varphi$$

$$X = |Z| \sin \varphi$$



$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$P = S \cos \varphi$$

$$Q = S \sin \varphi$$

例1: 在 RLC 串联交流电路中,

已知: $R = 30\Omega$, $L = 127\text{mH}$, $C = 40\mu\text{F}$

$$u = 220\sqrt{2} \sin (314t + 20^\circ) \text{V}$$

求: (1) 电流的有效值 I 与瞬时值 i ; (2) 各部分电压的有效值与瞬时值; (3) 作相量图; (4) 有功功率 P 、无功功率 Q 和视在功率 S 。

解: $X_L = \omega L = 314 \times 127 \times 10^{-3} \Omega = 40 \Omega$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \times 40 \times 10^{-6}} \Omega = 80 \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (40 - 80)^2} \Omega = 50 \Omega$$

方法1: (1) $I = \frac{U}{|Z|} = \frac{220}{50} \text{ A} = 4.4 \text{ A}$

$$\varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} = \arctan \frac{40 - 80}{30} = -53^\circ$$

因为 $\varphi = \psi_u - \psi_i = -53^\circ$, 所以 $\psi_i = 73^\circ$

$$i = 4.4\sqrt{2} \sin (314t + 73^\circ) \text{ A}$$

(2) $U_R = IR = 4.4 \times 30 \text{ V} = 132 \text{ V}$

$$u_R = 132\sqrt{2} \sin (314t + 73^\circ) \text{ V}$$

$$U_L = IX_L = 4.4 \times 40 \text{ V} = 176 \text{ V}$$

$$u_L = 176\sqrt{2} \sin (314t + 163^\circ) \text{ V}$$

方法1: $U_C = IX_C = 4.4 \times 80 = 352\text{V}$

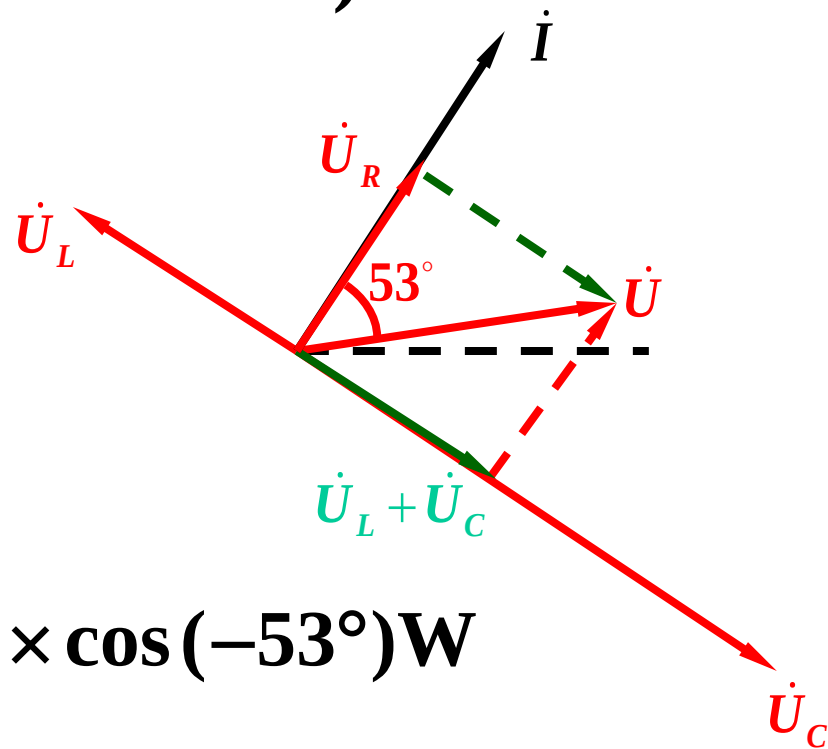
$$u_C = 352\sqrt{2} \sin (314t - 17^\circ)\text{V}$$

通过计算可看出:

$$U \neq U_R + U_L + U_C$$

而是 $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$

(3)相量图



$$\begin{aligned} (4) P &= UI \cos \varphi = 220 \times 4.4 \times \cos (-53^\circ)\text{W} \\ &= 580.8\text{W} \end{aligned}$$

$$\text{或 } P = U_R I = I^2 R = 580.8\text{W}$$

$$(4) \quad Q = UI \sin \varphi = 220 \times 4.4 \times \sin (-53^\circ) \text{var} \\ = -774.4 \text{ var} \quad (\text{电容性})$$

方法2: 复数运算

解: $\dot{U} = 220 \angle 20^\circ \text{V}$

$$Z = R + j(X_L - X_C) = (30 - j40) \Omega = 50 \angle -53^\circ \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220 \angle 20^\circ}{50 \angle -53^\circ} \text{A} = 4.4 \angle 73^\circ \text{A}$$

$$\dot{U}_R = \dot{I}R = 4.4 \angle 73^\circ \times 30 \text{V} = 132 \angle 73^\circ \text{V}$$

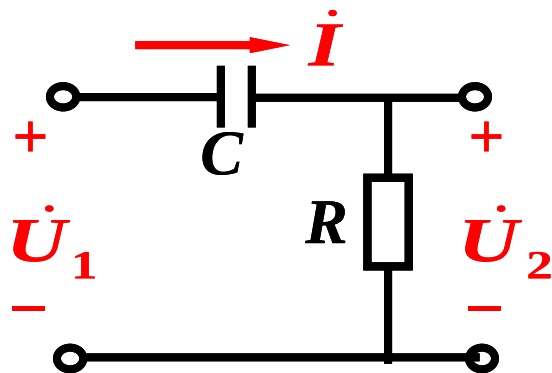
$$\dot{U}_L = j\dot{I}X_L = j4.4 \times 40 \angle 73^\circ \text{V} = 176 \angle 163^\circ \text{V}$$

$$\dot{U}_C = -j\dot{I}X_C = -j4.4 \times 80 \angle 73^\circ \text{V} = 352 \angle -17^\circ \text{V}$$

例2: 在RC串联交流电路中,

已知: $R = 2\text{k}\Omega$, $C = 0.1\mu\text{F}$

输入电压 $U_1 = 1\text{V}$, $f = 500\text{Hz}$



(1) 求输出电压 U_2 , 并讨论输入和输出电压之间的大小和相位关系 (2) 当将电容 C 改为 $20\mu\text{F}$ 时, 求(1)中各项; (3) 当将频率改为 4000Hz 时, 再求(1)中各项。

解: 方法1:

$$(1) X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 500 \times 0.1 \times 10^{-6}} \text{k}\Omega = 3.2 \text{k}\Omega$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{2^2 + 3.2^2} \text{k}\Omega = 3.77 \text{k}\Omega$$

$$I = \frac{U_1}{|Z|} = \frac{1}{3.77} \text{mA} = 0.27 \text{mA}$$

$$U_2 = IR = 0.27 \times 2 \text{V} = 0.54 \text{V}$$

$$\varphi = \arctan \frac{-X_C}{R} = \arctan \frac{-3.2}{2} = -58^\circ$$

大小和相位关系 $\frac{U_2}{U_1} = 54\%$ $\dot{U}_2$ 比 $\dot{U}_1$ 超前 58°

方法2: 复数运算

解: 设 $\dot{U}_1 = 1 \angle 0^\circ \text{V}$

$$\dot{U}_2 = \frac{R}{Z} \dot{U}_1 = \frac{2}{2 - j3.2} \times 1 \angle 0^\circ \text{V} = \frac{2}{3.77 \angle -58^\circ} \text{V} = 0.54 \angle 58^\circ \text{V}$$

方法3：相量图

解：设 $\dot{U}_1 = 1\angle 0^\circ \text{V}$

$$\varphi = \arctan \frac{-X_C}{R} = \arctan \frac{-3.2}{2} = -58^\circ$$

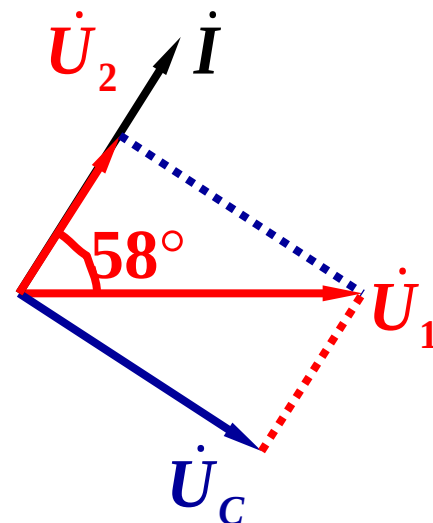
$$U_2 = U_1 \cos \varphi = 1 \times \cos 58^\circ \text{V} = 0.54 \text{V}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 500 \times 20 \times 10^{-6}} \Omega = 16 \Omega \ll R$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_C^2} \approx 2 \text{k}\Omega,$$

$$\varphi = \arctan \frac{-X_C}{R} \approx 0^\circ$$

$$U_2 = U_1 \cos \varphi \approx U_1 = 1 \text{V}$$



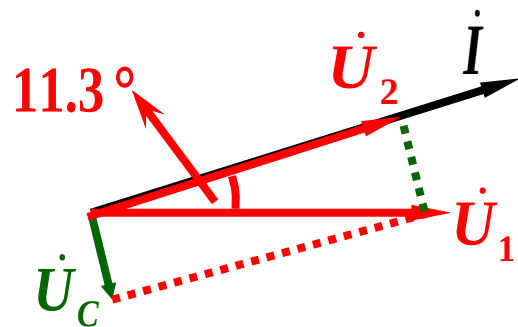
$$(3) X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 4000 \times 0.1 \times 10^{-6}} \Omega = 400 \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_C^2} = 2.04 \text{ k}\Omega, \quad \varphi = \arctan \frac{-X_C}{R} = -11.3^\circ$$

$$U_2 = U_1 \cos \varphi = 0.98 \text{ V}$$

大小和相位关系

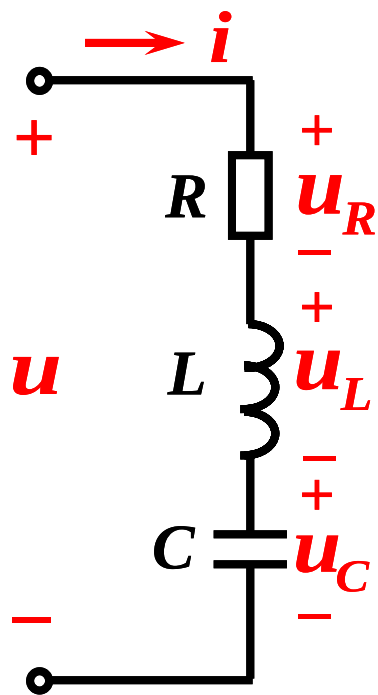
$$\frac{U_2}{U_1} = 98\% \quad \dot{U}_2 \text{ 比 } \dot{U}_1 \text{ 超前 } 11.3^\circ$$



从本例中可了解两个实际问题：

- (1) 串联电容 C 起到隔直通交作用 (C 选择合适使 $X_C \ll R$)
- (2) RC 串联电路也是一种移相电路, 改变 C 、 R 或 f 都可达到移相的目的。

思考



1. 假设 R 、 L 、 C 已定，电路性质能否确定？阻性？感性？容性？

2. RLC 串联电路的 $\cos\varphi$ 是否一定小于 1？

3. RLC 串联电路中是否会出现 $U_R > U$, $U_L > U, U_C > U$ 的情况？

4. 在 RLC 串联电路中，当 $L > C$ 时， u 超前 i ，当 $L < C$ 时， u 滞后 i ，这样分析对吗？



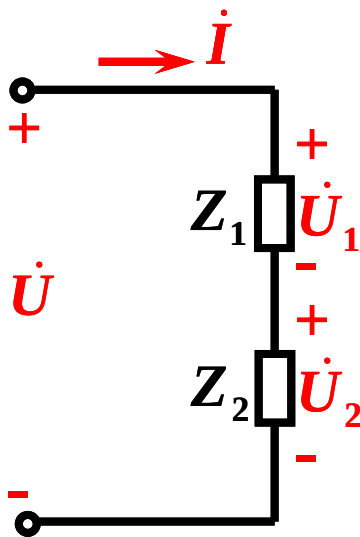
正误判断

在RLC串联电路中，

$I \checkmark \frac{U}{ Z }$	设 $\dot{i} = I \angle 0^\circ$	$I \times \frac{U}{R + X_L + X_C}$
$\dot{i} \checkmark \frac{\dot{U}}{Z}$	$\varphi \checkmark \arctan \frac{U_L - U_C}{U_R}$	$U \times U_R + U_L + U_C$
$I \times \frac{U}{Z}$	$\varphi \checkmark \arctan \frac{X_L - X_C}{R}$	$u \checkmark u_R + u_L + u_C$
$i \times \frac{u}{ Z }$	$\varphi \times \arctan \frac{\omega L - \omega C}{R}$	$Z \times R + X_L + X_C$
$\dot{i} \times \frac{\dot{U}}{ Z }$	$\varphi \times \arctan \frac{U_L - U_C}{U}$	$Z \times R + j(X_L + X_C)$

阻抗的串联与并联

1 阻抗的串联



$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = Z_1 \dot{I} + Z_2 \dot{I} \\ &= (Z_1 + Z_2) \dot{I}\end{aligned}$$

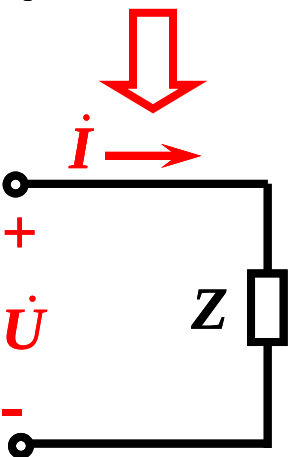
$$Z = Z_1 + Z_2 \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}$$

$$\text{通式: } Z = \sum Z_k = \sum R_k + j \sum X_k$$

注意: 对于阻抗模一般 $|Z| \neq |Z_1| + |Z_2|$

分压公式:

$$\dot{U}_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{U} \quad \dot{U}_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{U}$$



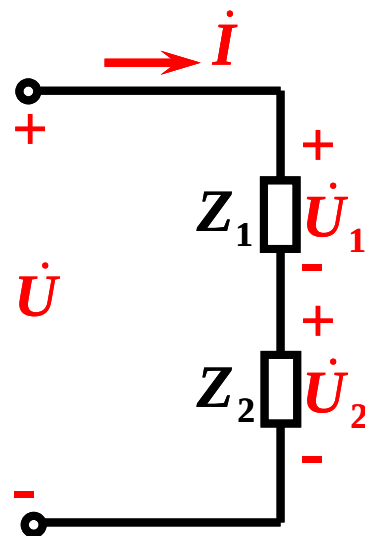
阻抗的串联与并联

例1: 有两个阻抗 $Z_1 = 6.16 + j9\Omega$ ， $Z_2 = 2.5 - j4\Omega$ ，它们串联接在 $\dot{U} = 220\angle 30^\circ\text{V}$ 的电源；求： $\dot{I}$ 和 $\dot{U}_1$ ， $\dot{U}_2$ 并作相量图。

$$\begin{aligned}\text{解: } Z &= Z_1 + Z_2 = (6.16 + 2.5) + j(9 - 4) \\ &= 8.66 + j5 = 10\angle 30^\circ\Omega\end{aligned}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220\angle 30^\circ}{10\angle 30^\circ} = 22\angle 0^\circ\text{A}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= Z_1\dot{I} = (6.16 + j9) \times 22\text{V} = 10.9\angle 55.6^\circ \times 22\text{V} \\ &= 239.8\angle 55.6^\circ\text{V}\end{aligned}$$



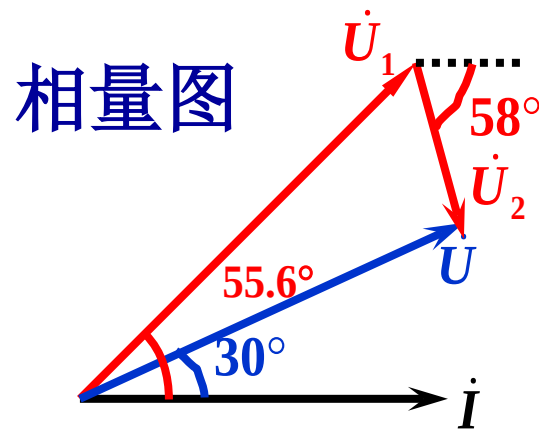
同理: $\dot{U}_2 = Z_2 \dot{I} = (2.5 - j4) \times 22\text{V} = 103.6 \angle -58^\circ \text{V}$

或利用分压公式:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{U} = \frac{6.16 + j9}{8.66 + j5} \times 220 \angle 30^\circ \text{V} \\ &= 239.8 \angle 55.6^\circ \text{V} \end{aligned}$$

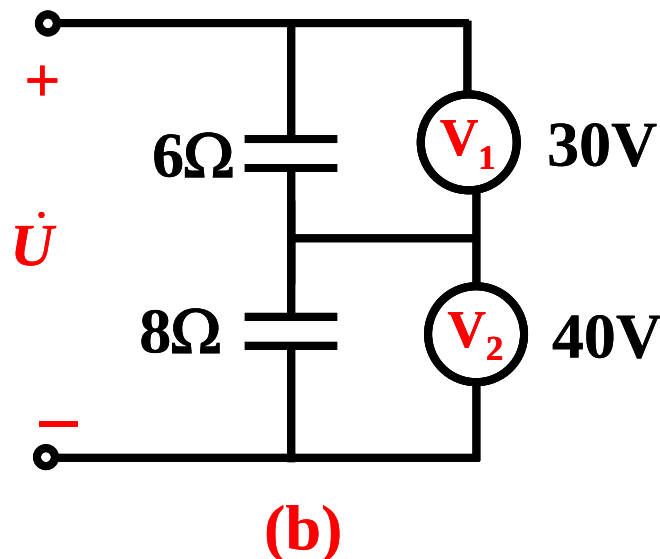
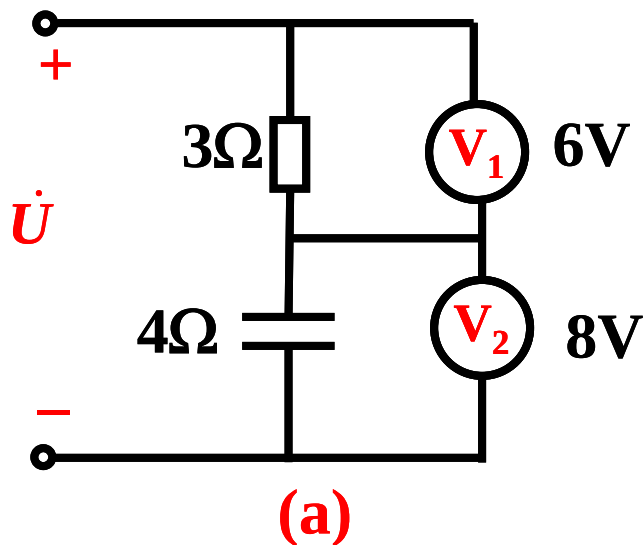
$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{U} = \frac{2.5 - j4}{8.66 + j5} \times 220 \angle 30^\circ \text{V} \\ &= 103.6 \angle -58^\circ \text{V} \end{aligned}$$

注意: $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$
 $U \neq U_1 + U_2$



思考

下列各图中给定的电路电压、阻抗是否正确？



$$|Z| = 7\Omega \quad U = 14V ?$$

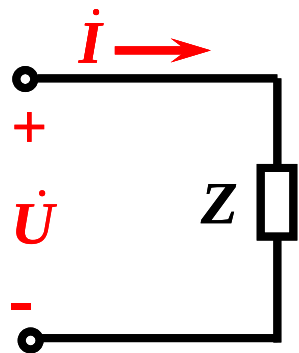
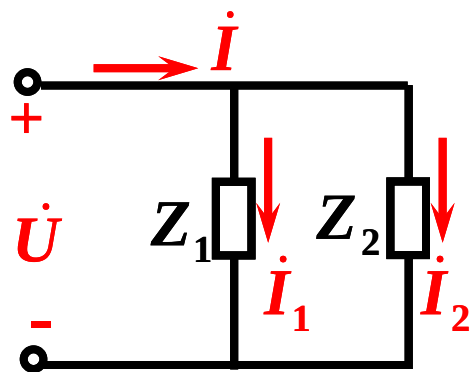
$$\begin{cases} |Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\Omega \\ U = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10V \end{cases}$$

$$|Z| = 10\Omega \quad U = 70V ?$$

$$\begin{cases} |Z| = 14\Omega \\ U = 70V \end{cases}$$

两个阻抗串联时，在什么情况下： $|Z| = |Z_1| + |Z_2|$ 成立？

2 阻抗并联



$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_1} + \frac{\dot{U}}{Z_2}$$

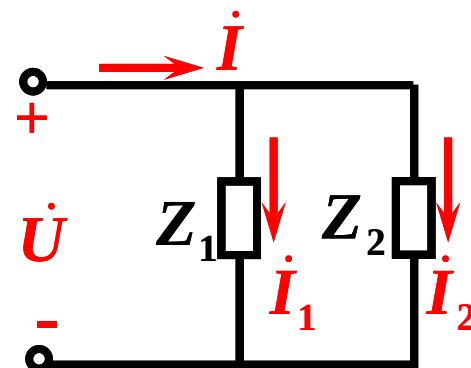
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} \quad \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

$$Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{通式: } \frac{1}{Z} = \sum \frac{1}{Z_k}$$

注意：对于阻抗模一般 $\frac{1}{|Z|} \neq \frac{1}{|Z_1|} + \frac{1}{|Z_2|}$
分流公式：

$$\dot{I}_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{I} \quad \dot{I}_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{I}$$

例2: 有两个阻抗 $Z_1 = 3 + \mathrm{j}4\Omega$, $Z_2 = 8 - \mathrm{j}6\Omega$,
它们并联接在 $\dot{U} = 220\angle 0^\circ\mathrm{V}$ 的电源上; 求: $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$
和 $\dot{I}$, 并作相量图。



$$\begin{aligned}\text{解: } Z &= \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{5\angle 53^\circ \times 10\angle -37^\circ}{3 + \mathrm{j}4 + 8 - \mathrm{j}6} \Omega \\ &= \frac{50\angle 16^\circ}{11.8\angle -10.5^\circ} \Omega = 4.47\angle 26.5^\circ \Omega\end{aligned}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{220\angle 0^\circ}{5\angle 53^\circ} \mathrm{A} = 44\angle -53^\circ \mathrm{A}$$

$$\text{同理: } \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{220 \angle 0^\circ}{10 \angle -37^\circ} \text{ A} = 22 \angle 37^\circ \text{ A}$$

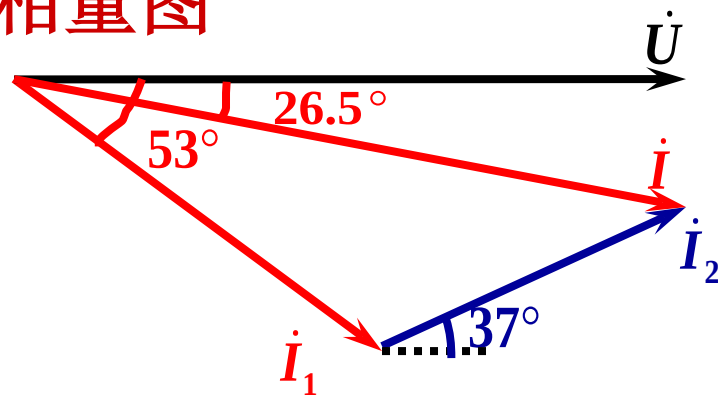
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220 \angle 0^\circ}{4.47 \angle 26.5^\circ} = 49.2 \angle -26.5^\circ \text{ A}$$

$$\begin{aligned} \text{或 } \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 44 \angle -53^\circ \text{ A} + 22 \angle 37^\circ \text{ A} \\ &= 49.2 \angle -26.5^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

注意: $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$

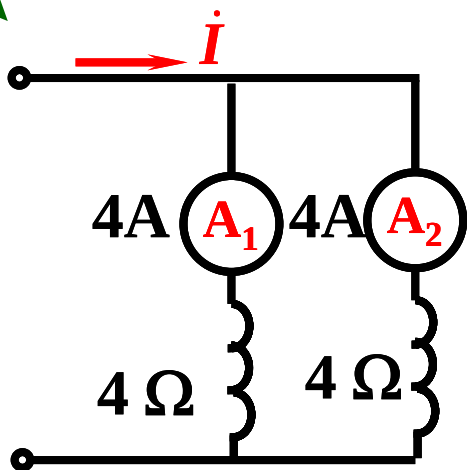
$$I \neq I_1 + I_2$$

相量图



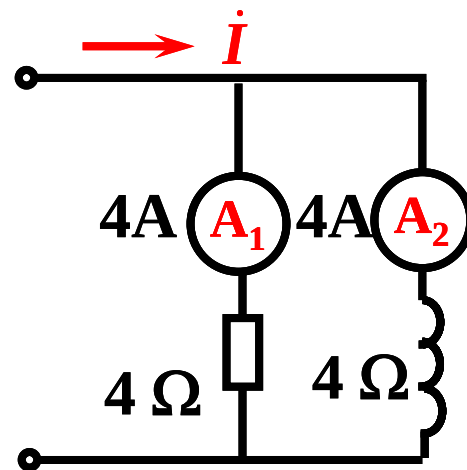
思考

下列各图中给定的电路电流、阻抗是否正确？



(c)

$$\begin{cases} |Z| = 2\Omega & I = 8A? \\ |Z| = 4//4 = 2\Omega \\ I = 8A \end{cases}$$



(d)

$$\begin{cases} |Z| = 2\Omega & I = 8A? \\ Z = 4//j4\Omega & |Z| = 2\sqrt{2}\Omega \\ I = 4\sqrt{2}A \end{cases}$$

两个阻抗并联，在什么情况下： $\frac{1}{|Z|} = \frac{1}{|Z_1|} + \frac{1}{|Z_2|}$ 成立？

4.3 交流电路分析

若正弦量用相量 $\dot{U}$ 、 $\dot{I}$ 表示，电路参数用复数阻抗 ($R \rightarrow R$ 、 $L \rightarrow j\omega L$ 、 $C \rightarrow -j\frac{1}{\omega C}$) 表示，则直流电路中介绍的基本定律、定理及各种分析方法在正弦交流电路中都能使用。

相量(复数)形式的欧姆定律

电阻电路	纯电感电路	纯电容电路	一般电路
------	-------	-------	------

$$\dot{U} = \dot{I}R$$

$$\dot{U} = \dot{I}(jX_L)$$

$$\dot{U} = \dot{I}(-jX_C)$$

$$\dot{U} = \dot{I}Z$$

相量形式的基尔霍夫定律

$$\text{KCL} \quad \sum \dot{I} = 0$$

$$\text{KVL} \quad \sum \dot{U} = 0$$

有功功率 P

有功功率等于电路中各电阻有功功率之和，或各支路有功功率之和。

$$P = \sum_1^i I_i^2 R_i \quad \text{或} \quad P = \sum_1^i U_i I_i \cos \varphi_i$$

φ_i 为 $\dot{U}_i$ 与 $\dot{I}_i$ 的相位差

无功功率 Q

无功功率等于电路中各电感、电容无功功率之和，或各支路无功功率之和。

$$Q = \sum_1^i I_i^2 (X_{Li} - X_{Ci}) \quad \text{或} \quad Q = \sum_1^i U_i I_i \sin \varphi_i$$

一般正弦交流电路的解题步骤

1. 根据原电路图画出相量模型图(电路结构不变)

$$\begin{aligned} R &\rightarrow R, \quad L \rightarrow jX_L, \quad C \rightarrow -jX_C \\ u &\rightarrow \dot{U}, \quad i \rightarrow \dot{I}, \quad e \rightarrow \dot{E} \end{aligned}$$

2. 根据相量模型列出相量方程式或画相量图

3. 用相量法或相量图求解

4. 将结果变换成要求的形式

例1: 已知: $u = 220\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$, $R = 30\Omega$,
 $R = 10\Omega$, $X_L = 10\Omega$, $X_C = 20\Omega$, 求: i , i_1 , i_2 。

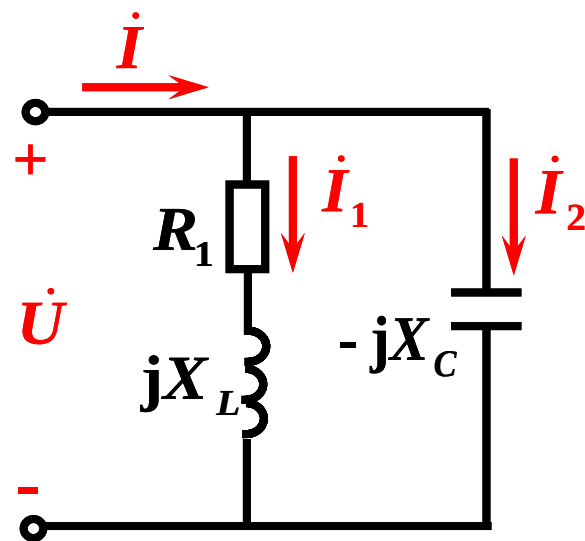
分析:

已知电源电压和电路参数, 电路结构为串并联。求电流的瞬时值表达式。

一般用相量式计算:

$$(1) Z_1, Z_2 \rightarrow Z \rightarrow \dot{I} \rightarrow i$$

$$(2) \dot{I} \rightarrow \dot{I}_1, \dot{I}_2 \rightarrow i_1, i_2$$



解：用相量式计算

$$\dot{U} = 220\angle 0^\circ \text{ V}$$

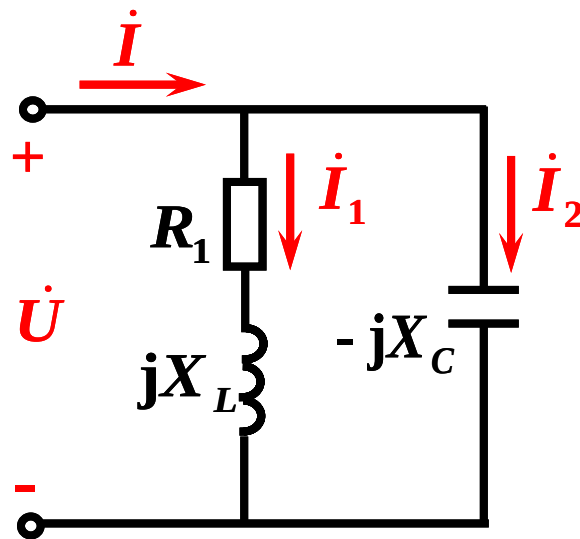
$$\begin{aligned} Z_1 &= R_1 + jX_L = (10 + j10) \Omega \\ &= 14.1\angle 45^\circ \Omega \end{aligned}$$

$$Z_2 = -jX_C = -j20 \Omega$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{220\angle 0^\circ}{14.1\angle 45^\circ} \text{ A} = 15.6\angle -45^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \frac{220\angle 0^\circ}{20\angle -90^\circ} \text{ A} = 11\angle 90^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 11 \text{ A} \qquad i = 11\sqrt{2}\sin 314t \text{ A}$$



例2: 图示电路中已知: $u = 220\sqrt{2} \sin 314t \text{ V}$
 $i_1 = 22 \sin (314t - 45^\circ) \text{ A}$, $i_2 = 11\sqrt{2} \sin (314t + 90^\circ) \text{ A}$
 试求: 各表读数及参数 R 、 L 和 C 。

解: 求各表读数

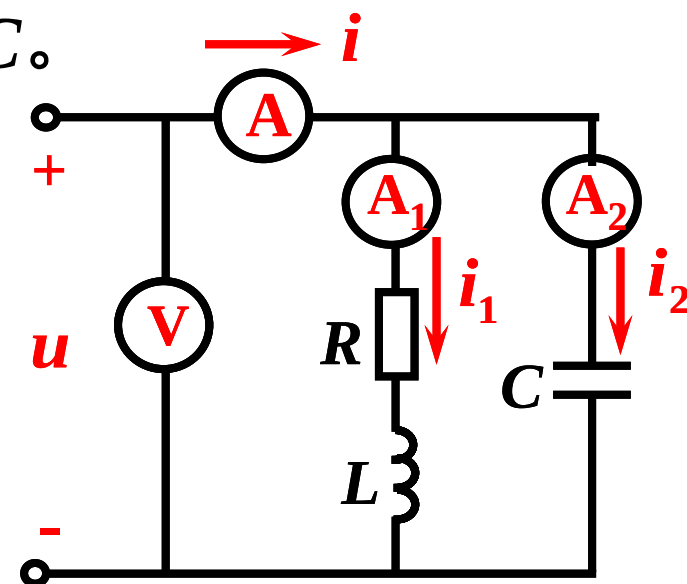
(1) 相量法计算

$$\dot{U} = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{22}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ = 15.6 \angle -45^\circ \text{ A}$$

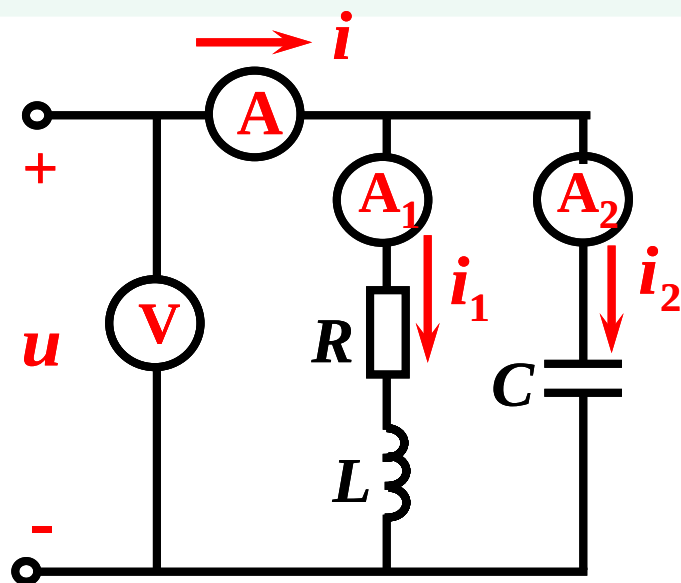
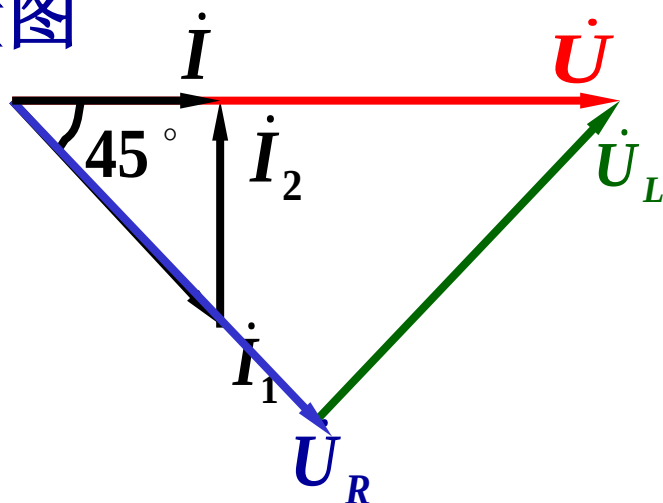
$$\dot{I}_2 = 11 \angle 90^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 15.6 \angle -45^\circ + 11 \angle 90^\circ \text{ A} = 11 \text{ A}$$



所以, $U = 220 \text{ V}$, $I_1 = 15.6 \text{ A}$, $I_2 = 11 \text{ A}$, $I = 11 \text{ A}$

(2) 相量图



根据相量图可得: $I = \sqrt{15.6^2 - 11^2} \text{ A} = 11 \text{ A}$

求参数 R 、 L 、 C

方法1:

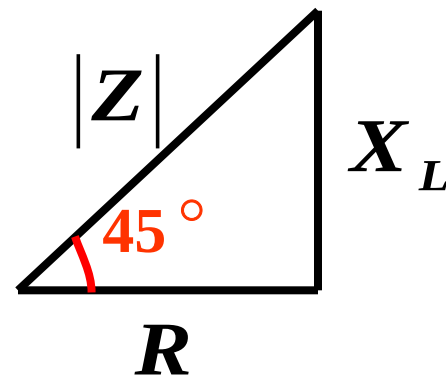
$$Z_1 = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_1} = \frac{220 \angle 0^\circ}{15.6 \angle -45^\circ} \Omega = 14.1 \angle 45^\circ \Omega = 10 + j10 \Omega$$

$$\therefore R = X_L = 10 \Omega \quad L = \frac{X_L}{2\pi f} = 0.0318 \text{ H}$$

$$Z_2 = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_2} = \frac{220 \angle 0^\circ}{11 \angle 90^\circ} \Omega = 20 \angle -90^\circ \Omega \quad \text{所以 } X_C = 20 \Omega$$

$$C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{314 \times 20} = 159 \mu F$$

方法2: $|Z_1| = \frac{U}{I_1} = 14.1 \Omega$



$$\begin{cases} R = |Z_1| \cos 45^\circ = 10 \Omega \\ X_L = |Z_1| \sin 45^\circ = 10 \Omega \end{cases} \quad L = \frac{X_L}{2\pi f} = 0.0318 \text{ H}$$

$$|Z_2| = \frac{U}{I_2} = 20 \Omega$$

即: $X_C = 20 \Omega \quad C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{314 \times 20} = 159 \mu F$

例3: 图示电路中,已知: $U=220\text{ V}$, $f=50\text{Hz}$, 分析下列情况:

- (1) S打开时, $P = 3872\text{W}$ 、 $I = 22\text{A}$, 求: I_1 、 U_R 、 U_L ;
- (2) S闭合后发现 P 不变, 但总电流减小, 试说明 Z_2 是什么性质的负载? 并画出此时的相量图。

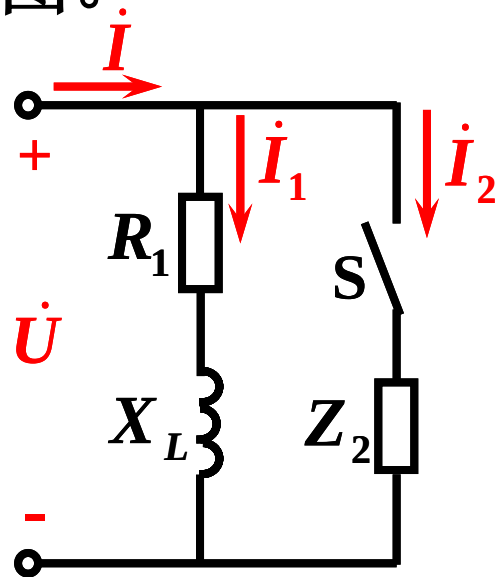
解: (1) S打开时: $I_1 = I = 22\text{A}$

$$P = UI \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{3872}{220 \times 22} = 0.8$$

$$\text{所以 } U_R = U \cdot \cos\varphi = 220 \times 0.8\text{V} = 176\text{ V}$$

$$U_L = U \cdot \sin\varphi = 220 \times 0.6\text{V} = 132\text{ V}$$



方法2: $I_1 = I = 22\text{A}$ $|Z| = \frac{U}{I} = 10\Omega$

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{3872}{22^2} \Omega = 8\Omega$$

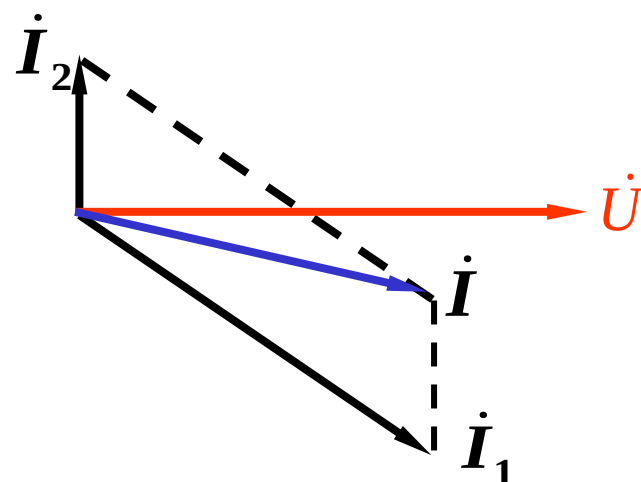
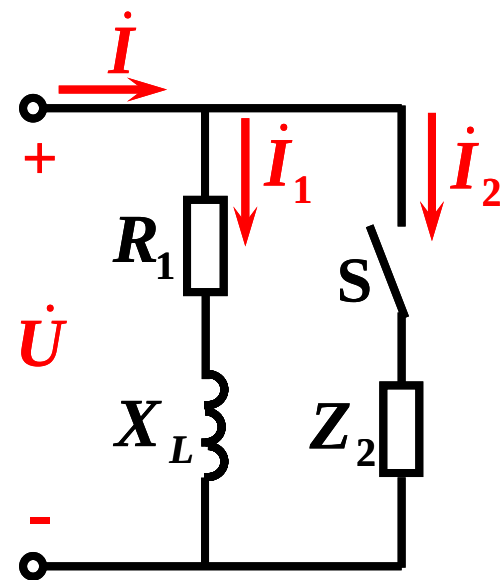
$$X_L = \sqrt{|Z|^2 - R^2} = 6\Omega$$

所以: $U_R = IR = 22 \times 8\text{V} = 176\text{V}$

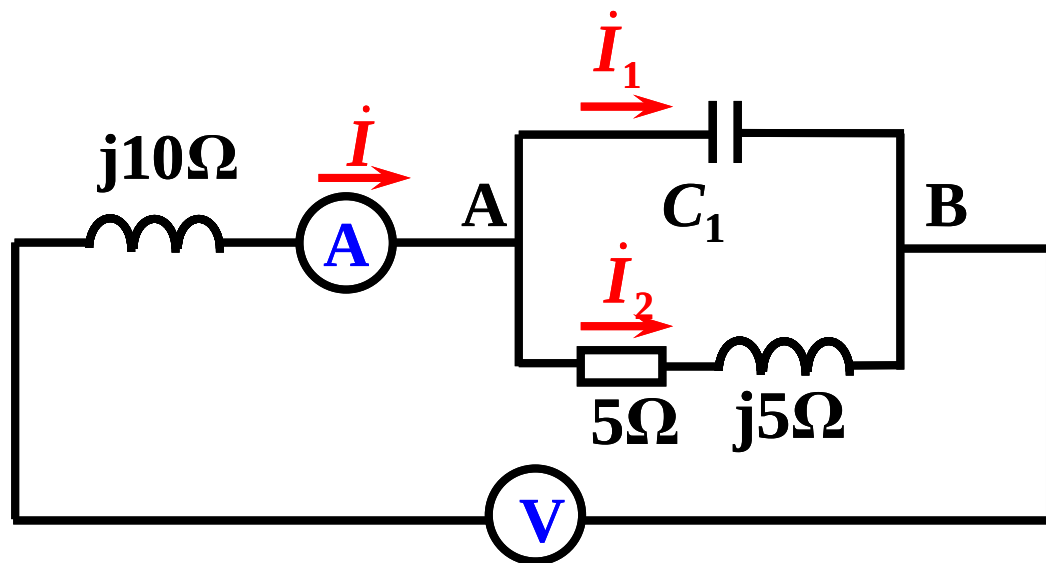
$$U_L = IX_L = 22 \times 6\text{V} = 132\text{V}$$

(2) 当合K后P不变 I 减小,
说明 Z_2 为纯电容负载

相量图如图示:

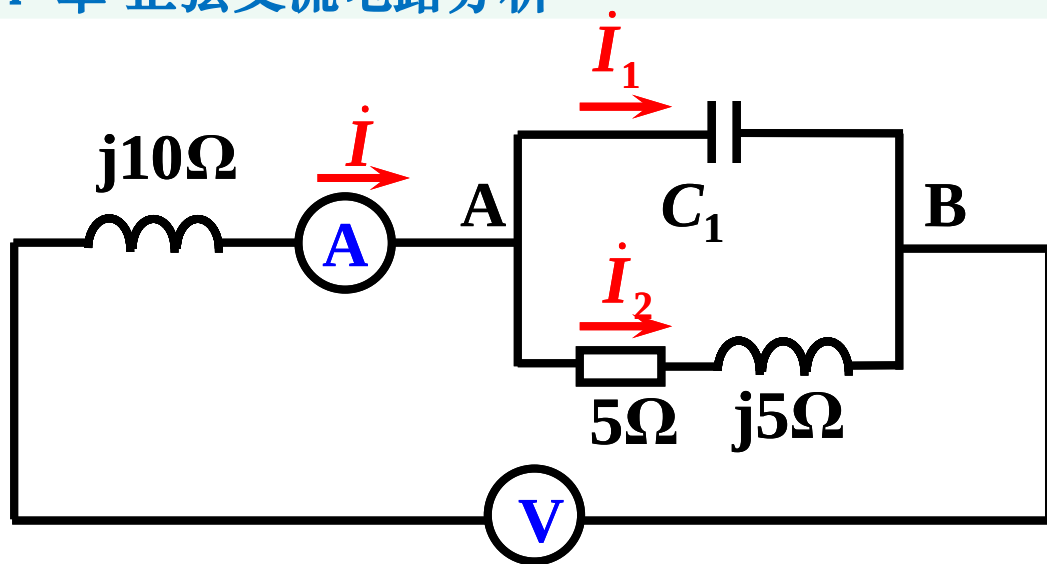


例4: 下图电路中已知: $I_1=10\text{A}$ 、 $U_{AB}=100\text{V}$, 求: 总电压表和总电流表的读数。



分析: 已知电容支路的电流、电压和部分参数, 求总电流和电压

解题方法有两种: (1) 用相量(复数)计算;
(2) 利用相量图分析求解。



已知: $I_1 = 10\text{A}$ 、
 $U_{AB} = 100\text{V}$,

求: A、V 的读数

解法1: 用相量计算

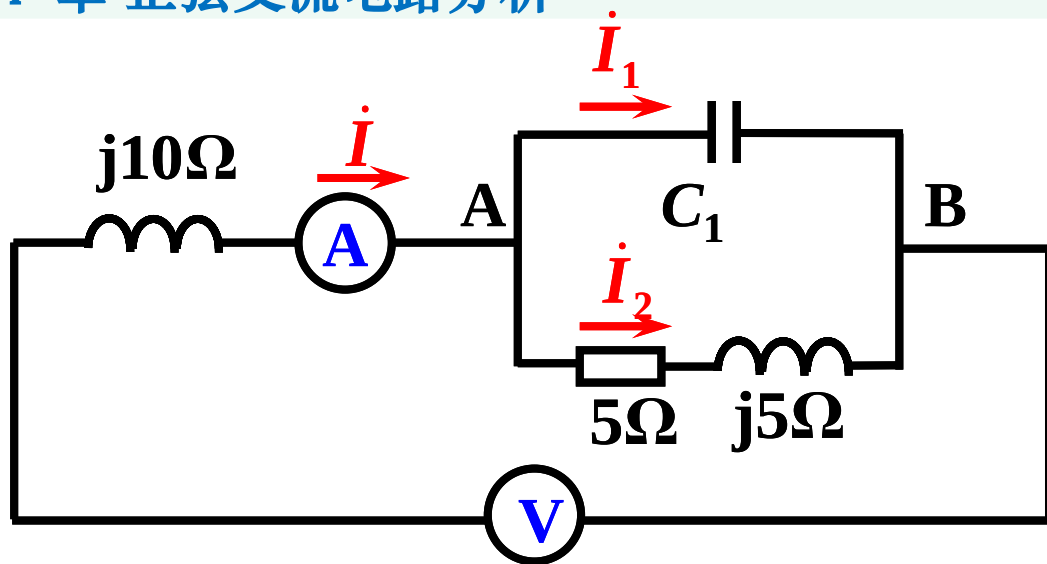
设: $\dot{U}_{AB}$ 为参考相量, 即: $\dot{U}_{AB} = 100\angle 0^\circ \text{V}$

则: $\dot{I}_2 = [100 / (5 + j5)]\text{A} = 10\sqrt{2}\angle -45^\circ \text{A}$

$$\dot{I}_1 = 10\angle 90^\circ \text{A} = j10 \text{A}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10\angle 0^\circ \text{A}$$

所以A读数为 10安



已知： $I_1 = 10\text{A}$ 、
 $U_{AB} = 100\text{V}$ ，

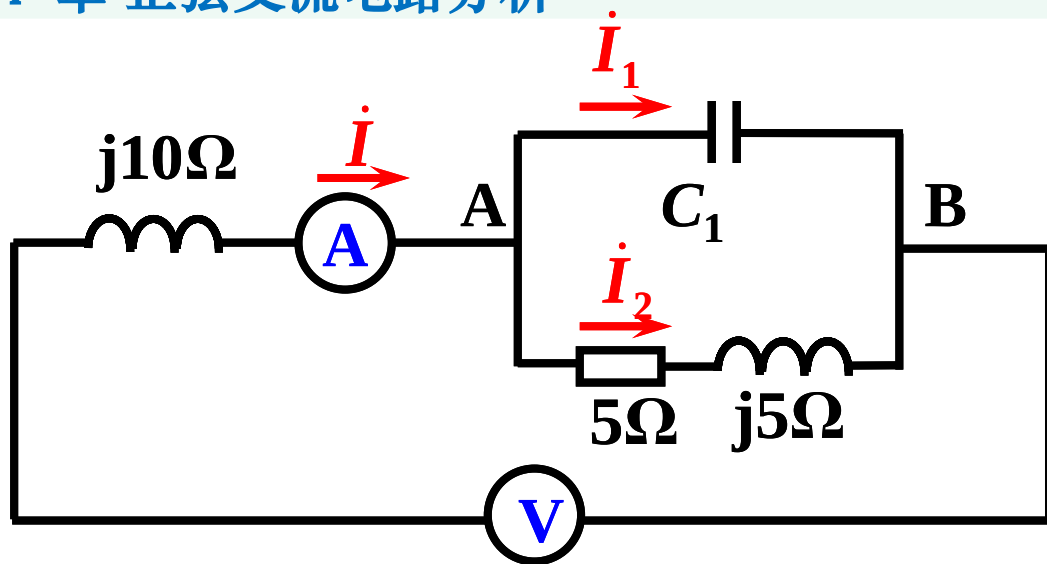
求： A、V 的读数

因为 $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10 \angle 0^\circ \text{A}$

所以 $\dot{U}_L = \dot{I} (j10) \text{V} = j100 \text{V}$

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_L + \dot{U}_{AB} = 100 + j100 \text{V} \\ &= 100\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{V} \end{aligned}$$

$\therefore$ V 读数为 141V



已知: $I_1 = 10\text{A}$ 、
 $U_{AB} = 100\text{V}$,

求: A、V 的读数

解法2: 利用相量图分析求解

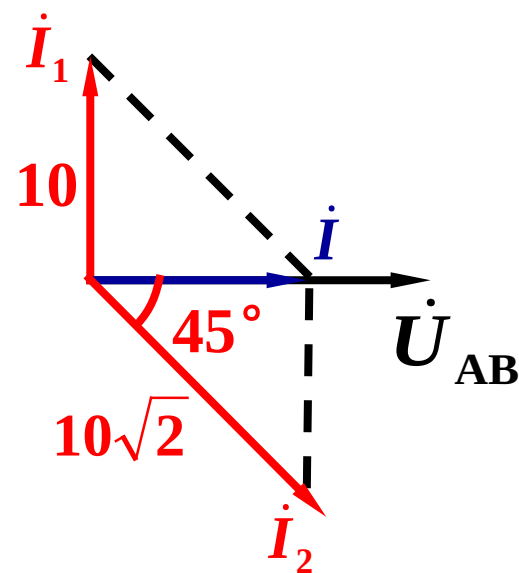
设 $\dot{U}_{AB}$ 为参考相量,

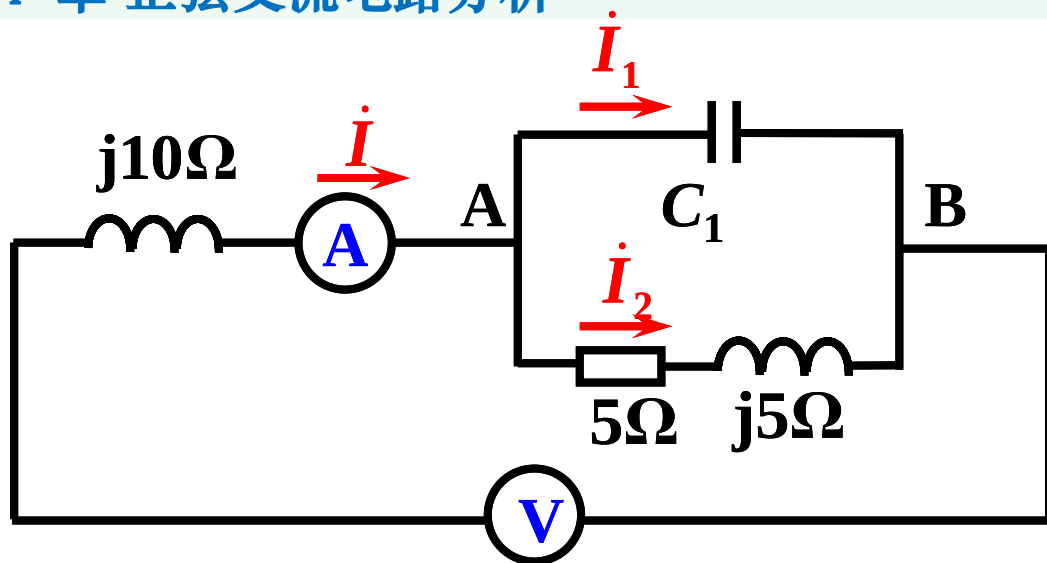
$I_1 = 10\text{A}$ $\dot{i}_1$ 超前 $\dot{U}_{AB}$ 90°

$I_2 = \frac{100}{\sqrt{5^2 + 5^2}} = 10\sqrt{2}\text{A}$, $\dot{i}_2$ 滞后 $\dot{U}_{AB}$ 45°

由相量图求得: $I = 10\text{A}$

相量图:





已知: $I_1 = 10\text{A}$ 、
 $U_{AB} = 100\text{V}$,

求: A、V 的读数

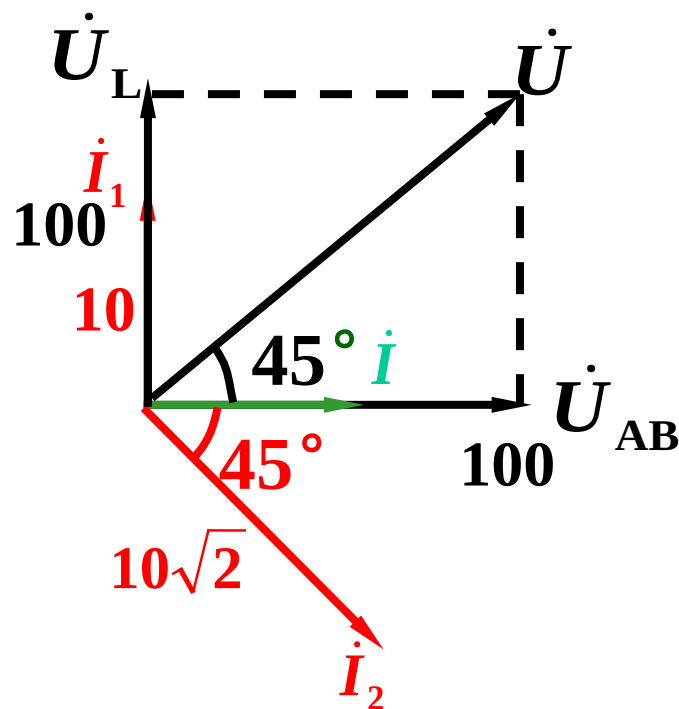
设 $\dot{U}_{AB}$ 为参考相量,

$$U_L = I X_L = 100\text{V}$$

$\dot{U}_L$ 超前 $\dot{i}$ 90°

由相量图可求得:

$$V = 141\text{V}$$



例5: 已知: $\dot{I} = 18\angle 45^\circ \text{ A}$, 求: $\dot{U}_{AB}$ 。

解: $\dot{I}_1 = \frac{j8}{30+j8} \times 18 \angle 45^\circ$

$$= 4.64 \angle 120^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{30}{30+j8} \times 18 \angle 45^\circ$$

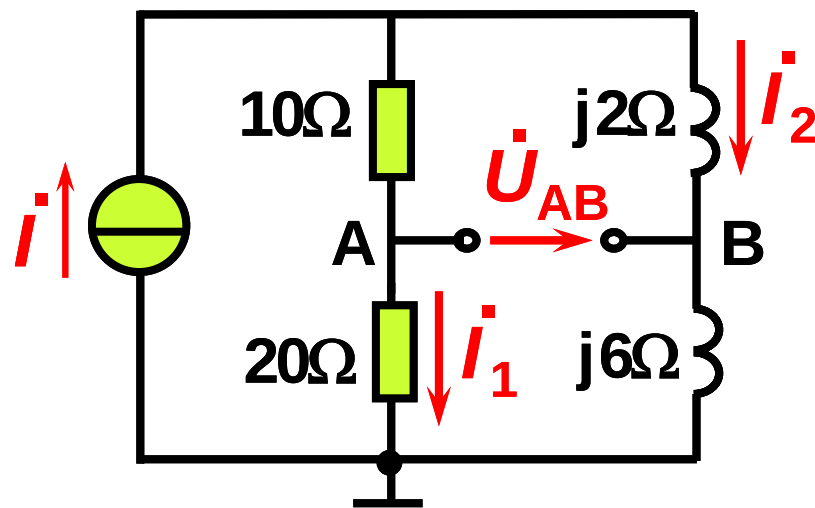
$$= 17.4 \angle 30^\circ \text{ A}$$

$$\dot{V}_A = 20 \dot{I}_1 = 92.8 \angle 120^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_B = j6 \dot{I}_2 = 104.4 \angle 120^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_{AB} = \dot{V}_A - \dot{V}_B = 92.8 \angle 120^\circ - 104.4 \angle 120^\circ$$

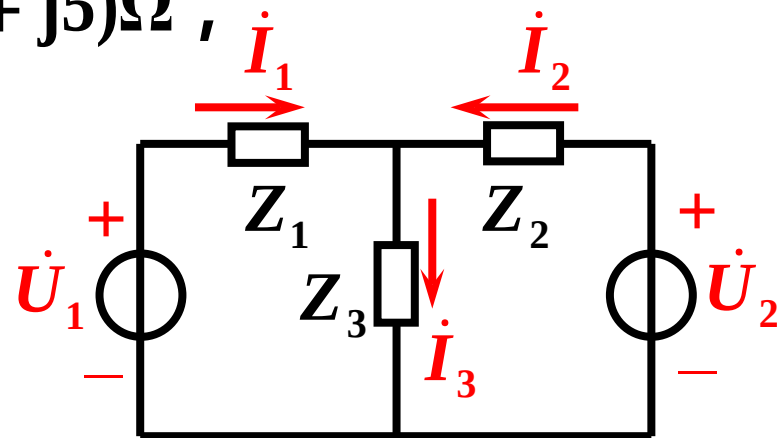
$$= -11.6 \angle 120^\circ \text{ V} = 11.6 \angle -60^\circ \text{ V}$$



复杂正弦交流电路的分析与计算

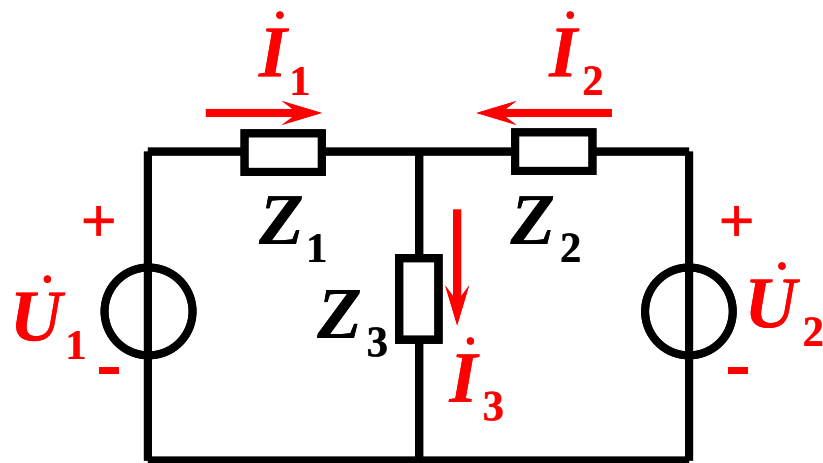
计算复杂直流电路的方法也适用于计算复杂交流电路。所不同的是电压和电流用**相量**表示，电阻、电感、和电容及组成的电路用**阻抗或导纳**来表示，采用**相量法**计算。

例1: 电路如图，已知 $\dot{U}_1 = 230\angle 0^\circ \text{V}$, $\dot{U}_2 = 227\angle 0^\circ \text{V}$, $Z_1 = Z_2 = (0.1 + \text{j}0.5)\Omega$, $Z_3 = (5 + \text{j}5)\Omega$, 试用支路电流法求电流 I_3 。



解：应用基尔霍夫定律列出相量表示方程

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \\ Z_1 \dot{I}_1 + Z_3 \dot{I}_3 = \dot{U}_1 \\ Z_2 \dot{I}_2 + Z_3 \dot{I}_3 = \dot{U}_2 \end{cases}$$



代入已知数据，可得：

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \\ (0.1 + j0.5)\dot{I}_1 + (5 + j5)\dot{I}_3 = 230\angle 0^\circ \text{V} \\ (0.1 + j0.5)\dot{I}_1 + (5 + j5)\dot{I}_3 = 227\angle 0^\circ \text{V} \end{cases}$$

解之，得： $\dot{I}_3 = 31.3\angle -46.1^\circ \text{A}$

例2: 应用叠加原理计算上例。

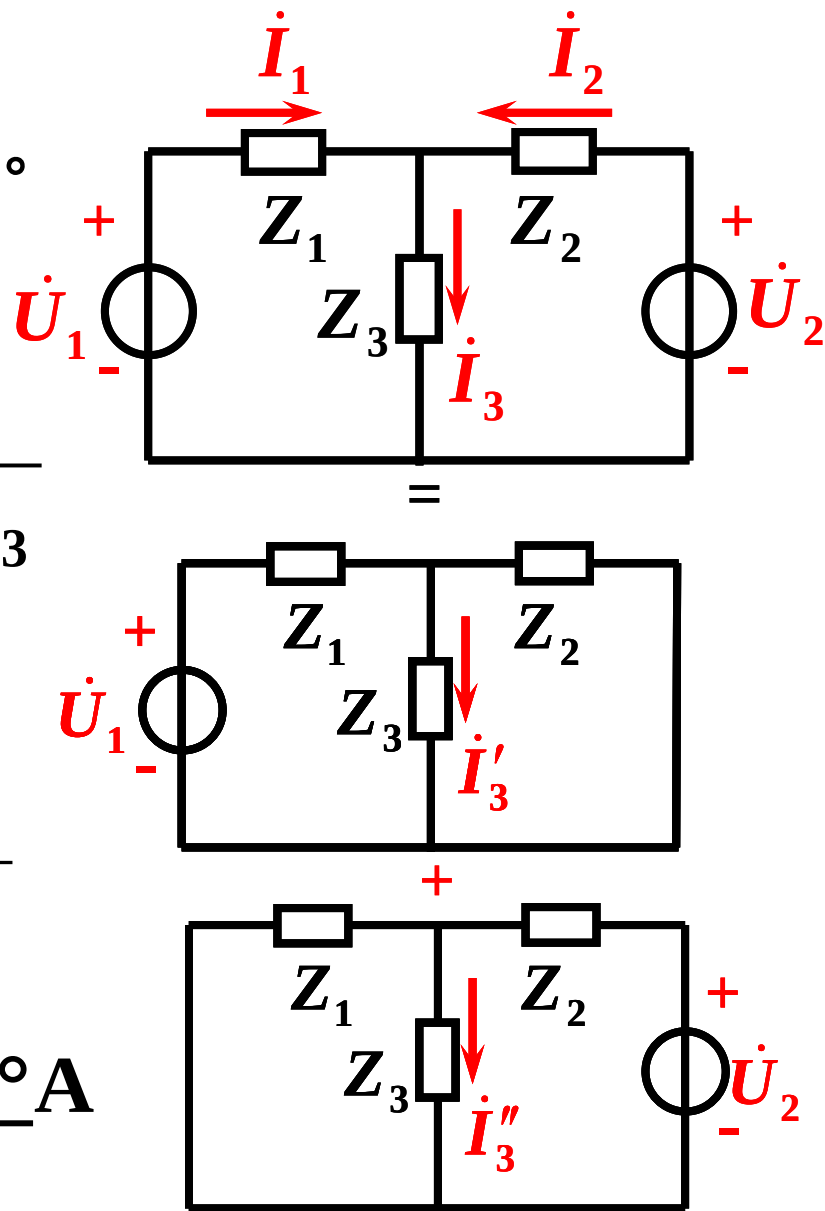
解: (1) 当 $\dot{U}_1$ 单独作用时

$$\dot{I}'_3 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1 + Z_2 // Z_3} \times \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3}$$

同理 (2) 当 $\dot{U}_2$ 单独作用时

$$\dot{I}''_3 = \frac{\dot{U}_2}{Z_2 + Z_1 // Z_3} \times \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3}$$

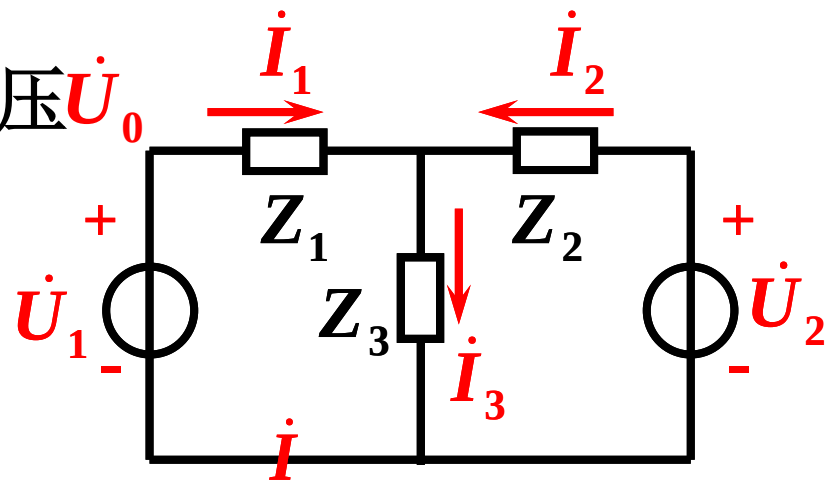
$$\dot{I}_3 = \dot{I}'_3 + \dot{I}''_3 = 31.3 \angle -46.1^\circ \text{ A}$$



例3: 应用戴维宁计算上例。

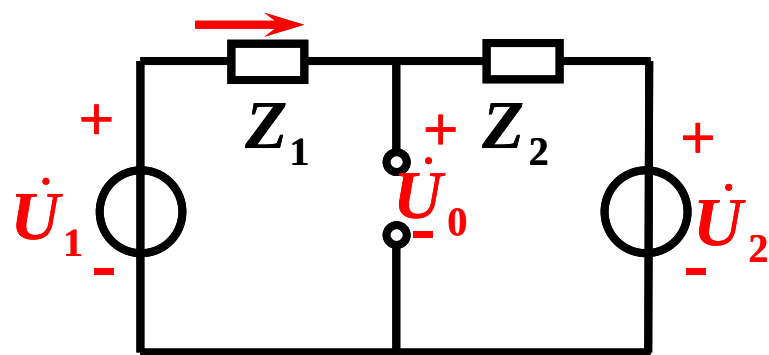
解: (1) 断开 Z_3 支路, 求开路电压 $\dot{U}_0$

$$\begin{aligned}\dot{U}_0 &= \frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_2}{Z_1 + Z_2} \times Z_2 + \dot{U}_2 \\ &= 228.85 \angle 0^\circ \text{V}\end{aligned}$$

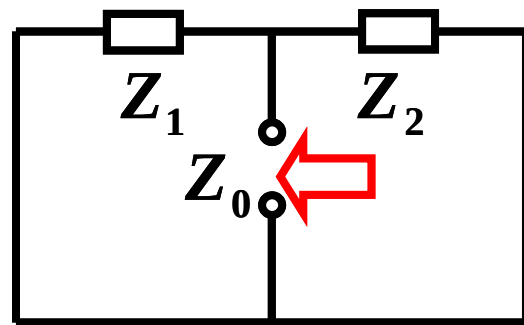


(2) 求等效内阻抗 Z_0

$$\begin{aligned}Z_0 &= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_1}{2} \\ &= (0.05 + j0.25) \Omega\end{aligned}$$



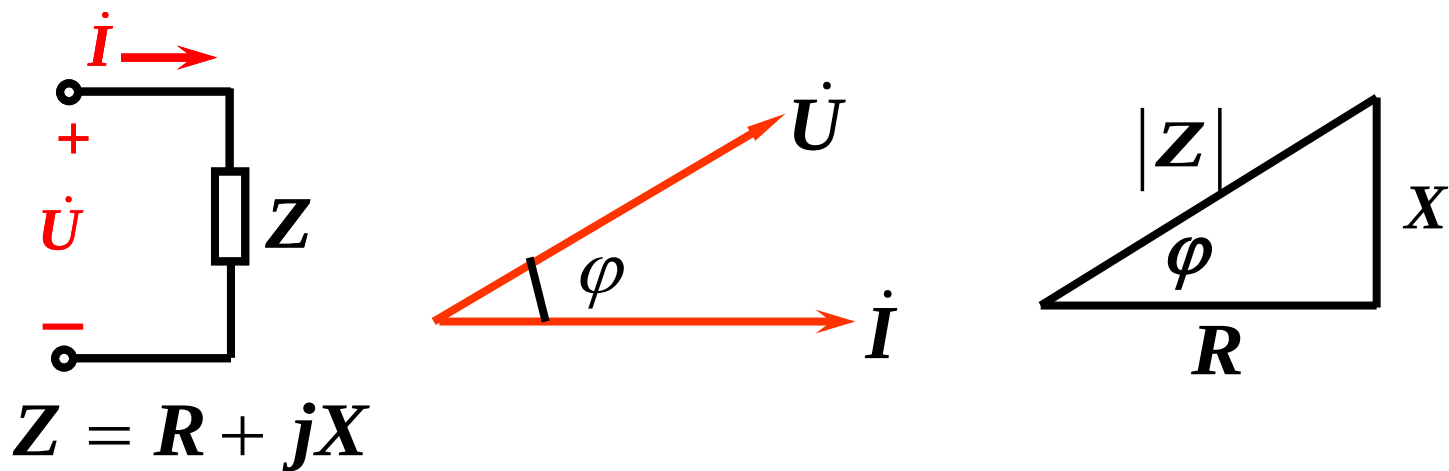
$$(3) \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_0}{Z_0 + Z_3} = 31.3 \angle -46.1^\circ \text{A}$$



4.4 功率与功率因数的提高

1. 功率因数 $\cos\varphi$ ：对电源利用程度的衡量。

φ 的意义：电压与电流的相位差，阻抗的辐角



当 $\cos\varphi < 1$ 时，电路中出现能量互换，出现无功功率 $Q = UI \sin\varphi$ ，这样引起两个问题：

(1) 电源设备的容量不能充分利用

$$S_N = U_N \cdot I_N = 1000 \text{ kV} \cdot \text{A}$$

若用户： $\cos\varphi = 1$ 则电源可发出的有功功率为：

$$P = U_N I_N \cos\varphi = 1000 \text{ kW}$$

无需提供的无功功率。

若用户： $\cos\varphi = 0.6$ 则电源可发出的有功功率为：

$$P = U_N I_N \cos\varphi = 600 \text{ kW}$$

而需提供的无功功率为： $Q = U_N I_N \sin\varphi = 800 \text{ kvar}$

所以提高 $\cos\varphi$ 可使发电设备的容量得以充分利用

(2) 增加线路和发电机绕组的功率损耗

设输电线和发电机绕组的电阻为 r :

要求: $P = U I \cos\varphi$ (P 、 U 定值) 时

$$I \uparrow = \frac{P}{U \cos\varphi \downarrow} \begin{cases} \Delta P \uparrow = I^2 \uparrow r \text{ (费电)} \\ I \uparrow \rightarrow S \uparrow \text{ (导线截面积)} \end{cases}$$

所以提高 $\cos\varphi$ 可减小线路和发电机绕组的损耗。

提高电网的功率因数对国民经济发展有重要的意义。

2. 功率因数 $\cos\varphi$ 低的原因

日常生活中多为感性负载——如电动机、日光灯，其等效电路及相量关系如下图。

$$L \uparrow \Rightarrow \omega L \uparrow \Rightarrow \varphi \uparrow \Rightarrow \cos \varphi \downarrow \Rightarrow I \uparrow$$

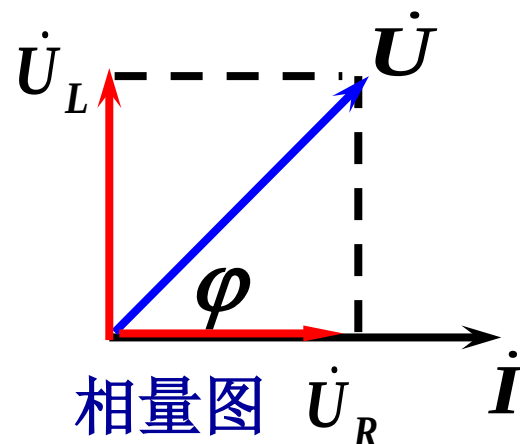
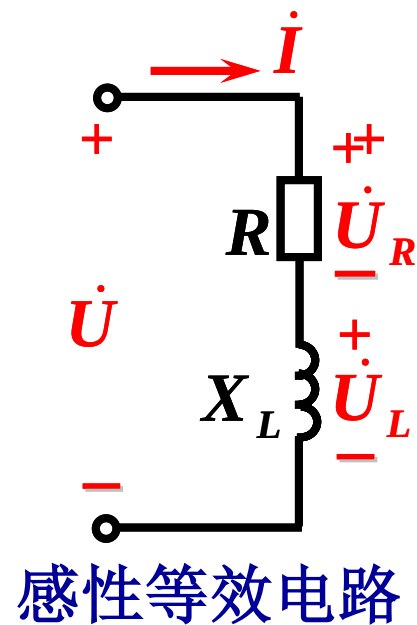
例：40W220V白炽灯 $\cos \varphi = 1$

$$P = U I \cos \varphi$$

$$\Rightarrow I = \frac{P}{U} = \frac{40}{220} \text{ A} = 0.182 \text{ A}$$

40W220V日光灯 $\cos \varphi = 0.5$

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{40}{220 \times 0.5} \text{ A} = 0.364 \text{ A}$$



供电局一般要求用户的 $\cos \varphi > 0.9$ 否则受处罚

常用电路的功率因数

纯电阻电路	$\cos \varphi = 1 \quad (\varphi = 0)$
纯电感电路或 纯电容电路	$\cos \varphi = 0 \quad (\varphi = \pm 90^\circ)$
R - L - C 串联电路	$1 > \cos \varphi > 0$ $(-90^\circ < \varphi < +90^\circ)$
电动机 空载 电动机 满载	$\cos \varphi = 0.2 \sim 0.3$ $\cos \varphi = 0.7 \sim 0.9$
日光灯 (R - L 串联电路)	$\cos \varphi = 0.5 \sim 0.6$

3. 功率因数的提高

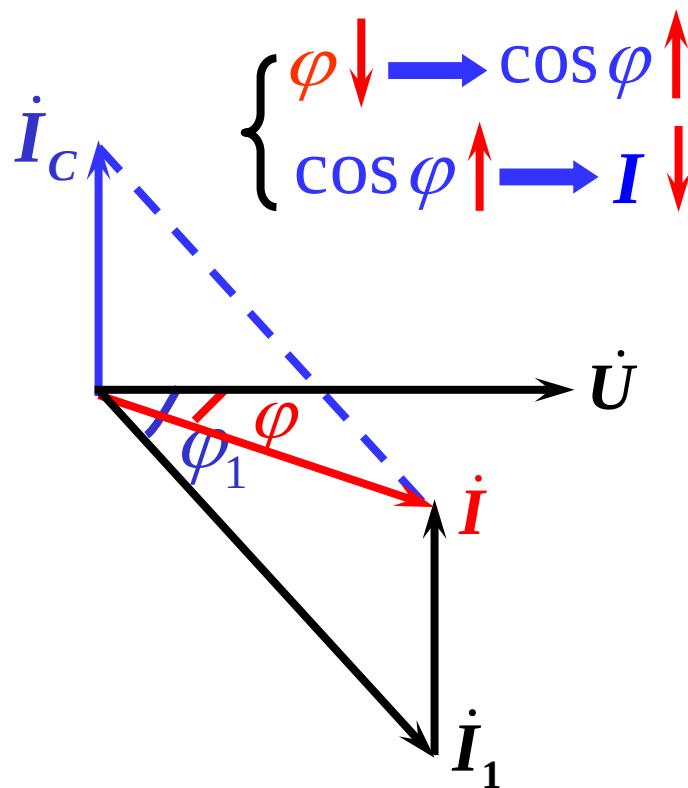
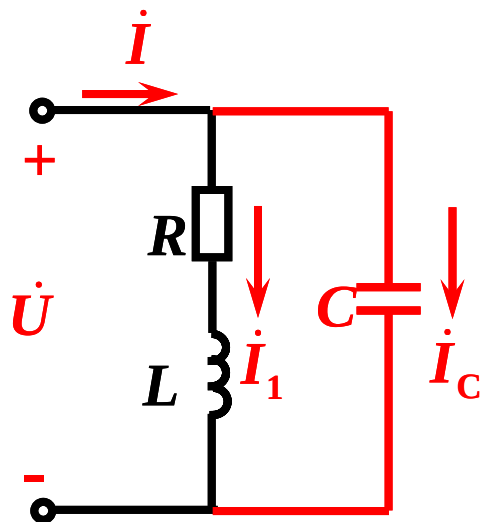
(1) 提高功率因数的原则

必须保证原负载的工作状态不变。即：

加至原负载上的电压和负载的有功功率不变。

(2) 提高功率因数的措施

在感性负载两端并电容



结论:

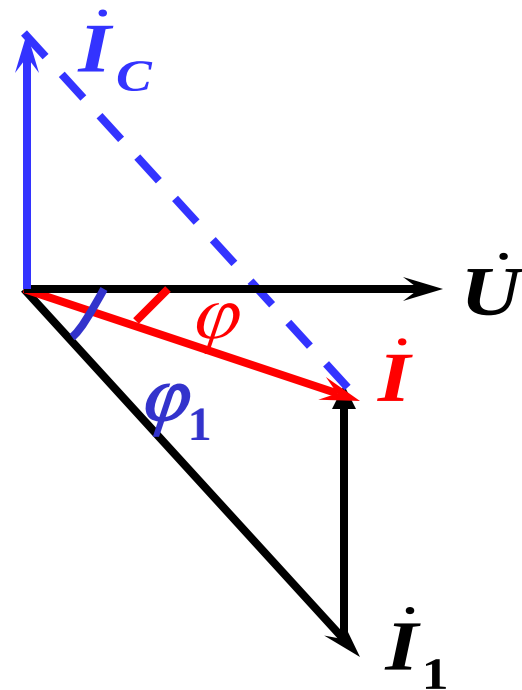
并联电容 C 后

(1) 电路的总电流 $I \downarrow$ ，电路总功率因数 $\cos \varphi \uparrow$

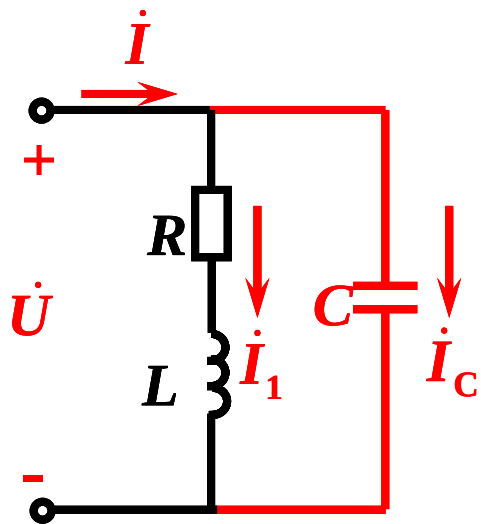
(2) 原感性支路的工作状态不变:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{感性支路的功率因数 } \cos \varphi_1 \text{ 不变} \\ \text{感性支路的电流 } I_1 \text{ 不变} \end{array} \right.$

(3) 电路总的有功功率不变
因为电路中电阻没有变，
所以消耗的功率也不变。



4. 并联电容值的计算



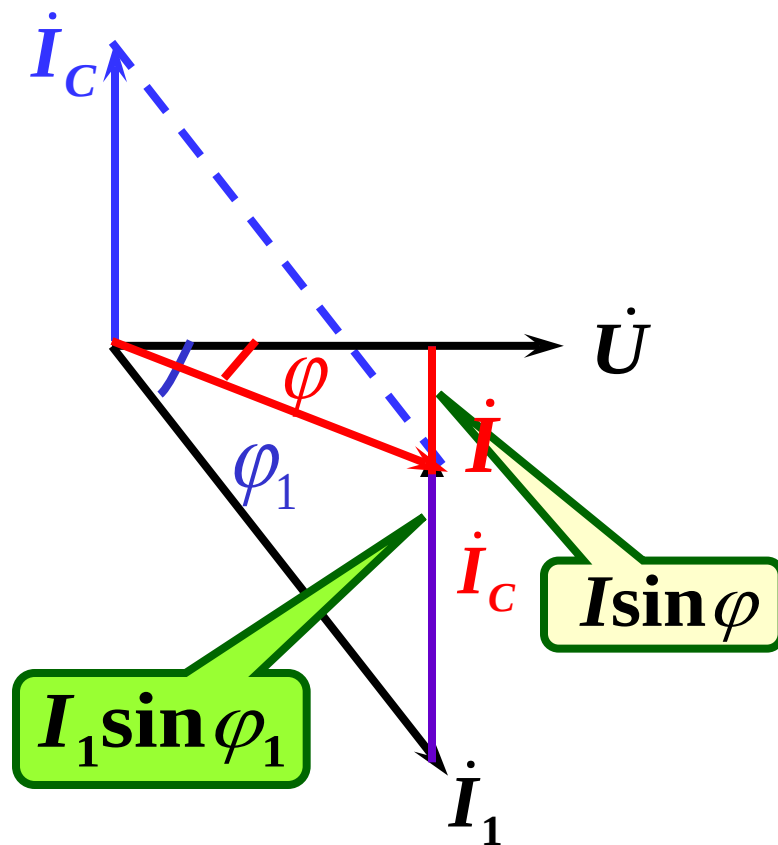
由于 $I_C = U\omega C$

由相量图可得

$$I_C = I_1 \sin \varphi_1 - I \sin \varphi$$

即: $U\omega C = I_1 \sin \varphi_1 - I \sin \varphi$

相量图:



$$U \omega C = \frac{P}{U \cos \varphi_1} \sin \varphi_1 - \frac{P}{U \cos \varphi} \sin \varphi$$

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi)$$

思考题:

1. 电感性负载采用串联电容的方法是否可提高功率因数, 为什么?
2. 原负载所需的无功功率是否有变化, 为什么?
3. 电源提供的无功功率是否有变化, 为什么?

例1: 一感性负载,其功率 $P = 10\text{kW}$, $\cos\varphi = 0.6$,
接在电压 $U = 220\text{V}$, $f = 50\text{Hz}$ 的电源上。

(1) 如将功率因数提高到 $\cos\varphi = 0.95$, 需要并多大的电容 C , 求并 C 前后的线路的电流。

(2) 如将 $\cos\varphi$ 从0.95提高到1, 还需并多大的电容 C 。

解: (1)
$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\tan\varphi_1 - \tan\varphi)$$

$$\cos\varphi_1 = 0.6, \text{ 即 } \varphi_1 = 53^\circ$$

$$\cos\varphi = 0.95, \text{ 即 } \varphi = 18^\circ$$

$$C = \frac{10 \times 10^3}{314 \times 220^2} (\tan 53^\circ - \tan 18^\circ) \text{ F} = 656 \mu\text{F}$$

求并C前后的线路电流

$$\text{并 } C \text{ 前: } I_1 = \frac{P}{U \cos \varphi_1} = \frac{10 \times 10^3}{220 \times 0.6} \text{ A} = 75.6 \text{ A}$$

$$\text{并 } C \text{ 后: } I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{10 \times 10^3}{220 \times 0.95} \text{ A} = 47.8 \text{ A}$$

(2) $\cos \varphi$ 从 0.95 提高到 1 时所需增加的电容值

$$C = \frac{10 \times 10^3}{314 \times 220^2} (\tan 18^\circ - \tan 0^\circ) \text{ F} = 213.6 \text{ } \mu\text{F}$$

可见： $\cos \varphi \approx 1$ 时再继续提高，则所需电容值很大（不经济），所以一般不必提高到 1。

例2: 已知电源 $U_N = 220V$, $f = 50Hz$, $S_N = 10kV.A$
向 $P_N = 6kW$, $U_N = 220V$, $\cos\varphi_N = 0.5$ 的感性负载供电,

(1) 该电源供出的电流是否超过其额定电流?

(2) 如并联电容将 $\cos\varphi$ 提高到 0.9, 电源是否还有富裕的容量?

解: (1) 电源提供的电流为

$$I = \frac{P}{U \cos\varphi} = \frac{6 \times 10^3}{220 \times 0.5} A = 54.54A$$

电源的额定电流为

所以 $I > I_N$

$$I_N = \frac{S_N}{U_N} = \frac{10 \times 10^3}{220} A = 45.45A$$

例2:

$I > I_N$ ，该电源供出的电流超过其额定电流。

(2) 如将 $\cos\varphi$ 提高到0.9后，电源提供的电流为

$$I = \frac{P}{U\cos\varphi} = \frac{6 \times 10^3}{220 \times 0.9} \text{ A} = 30.3 \text{ A}$$

所以 $I < I_N$

该电源还有富裕的容量，即还有能力再带负载；
所以提高电网功率因数后，将提高电源的利用率。

4.5 谐振电路

谐振的概念:

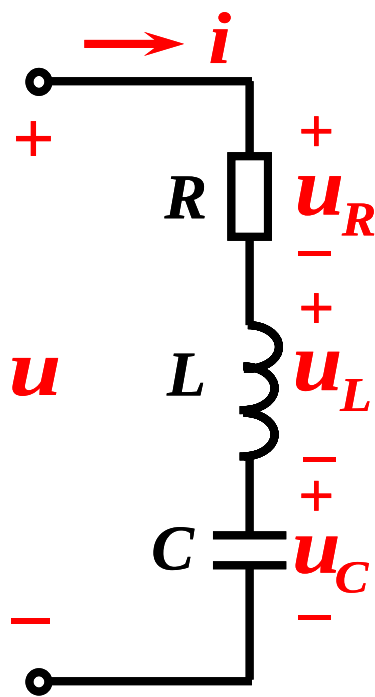
在同时含有 L 和 C 的交流电路中, 如果总电压和总电流同相, 称电路处于谐振状态。此时电路与电源之间不再有能量的交换, 电路呈电阻性。

{ 串联谐振: L 与 C 串联时 u 、 i 同相
并联谐振: L 与 C 并联时 u 、 i 同相

研究谐振的目的, 就是一方面在生产上充分利用谐振的特点 (如在无线电工程、电子测量技术等许多电路中应用)。另一方面又要预防它所产生的危害。

1. 串联谐振

串联谐振电路



(1) 谐振条件

由定义，谐振时： $\dot{U}$ 、 $\dot{I}$ 同相

即 $\varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} = 0$

谐振条件： $X_L = X_C$

或：

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

谐振时的角频率

(2) 谐振频率

根据谐振条件： $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$

(2) 谐振频率

或： $2\pi f_0 L = \frac{1}{2\pi f_0 C}$ 可得谐振频率：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

或

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

电路发生谐振的方法：

- (1) 电源频率 f 一定，调参数 L 、 C 使 $f_0 = f$ ；
- (2) 电路参数 LC 一定，调电源频率 f ，使 $f = f_0$

(3) 谐振特征

1) 阻抗最小 $|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R$

2) 电流最大

当电源电压一定时： $I = I_0 = \frac{U}{R}$

3) $\dot{U}$ 、 $\dot{I}$ 同相

$$\varphi = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} = 0$$

电路呈电阻性，能量全部被电阻消耗， Q_L 和 Q_C 相互补偿。即电源与电路之间不发生能量互换。

4) 电压关系

电阻电压： $U_R = I_0 R = U$

电容、电感电压： $\dot{U}_L = -\dot{U}_C$

大小相等、
相位相差 180°

$$U_L = I_0 X_L = U_C = I_0 X_C$$

当 $X_L = X_C \gg R$ 时:

有: $U_L = U_C \gg U_R = U$

U_C 、 U_L 将大于
电源电压 U

由于 $U_L = U_C \gg U$ 可能会击穿线圈或电容的绝缘，因此在电力系统一般应避免发生串联谐振，但在无线电工程上，可利用这一特点达到选择信号的作用。

令:
$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

Q 品质因数，表征串联谐振电路的谐振质量

有： $U_L = U_C = QU$ 串联谐振又称为电压谐振。



谐振时： $\dot{U}_L$ 与 $\dot{U}_C$ 相互抵消，但其本身不为零，而是电源电压的 Q 倍。

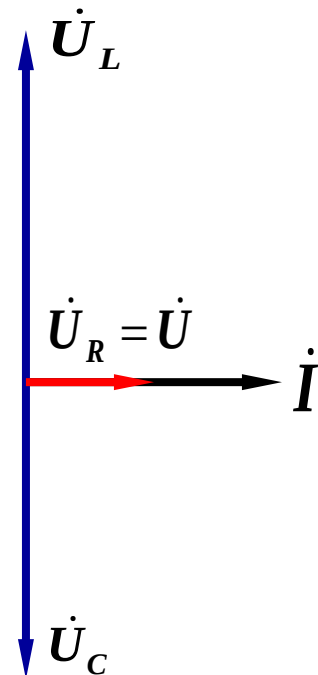
相量图

$$\begin{cases} U_L = I_0 X_L = \frac{\omega_0 L}{R} U = QU \\ U_C = I_0 X_C = \frac{1}{\omega_0 CR} U = QU \end{cases}$$

如 $Q = 100$, $U = 220\text{V}$, 则在谐振时

$$U_L = U_C = QU = 22000\text{V}$$

所以电力系统应避免发生串联谐振。



(4) 谐振曲线

1) 串联电路的阻抗频率特性

阻抗随频率变化的关系。

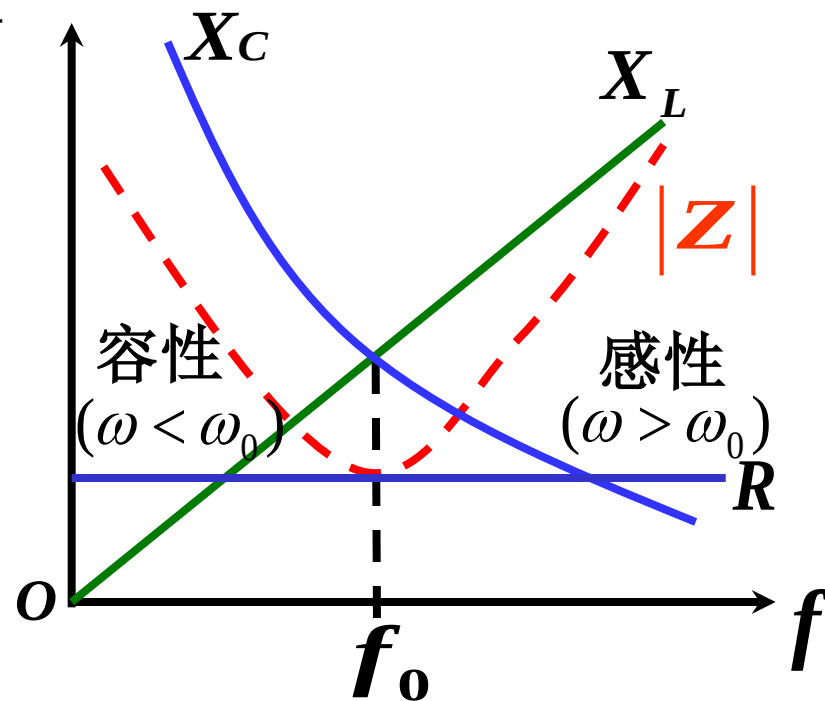
$$Z = R + \mathrm{j}(X_L - X_C)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

$$X_L = 2\pi f L$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$$

$$\begin{cases} \omega < \omega_0 \Rightarrow |Z| \uparrow \\ \omega = \omega_0 \Rightarrow |Z| = R \\ \omega > \omega_0 \Rightarrow |Z| \uparrow \end{cases}$$



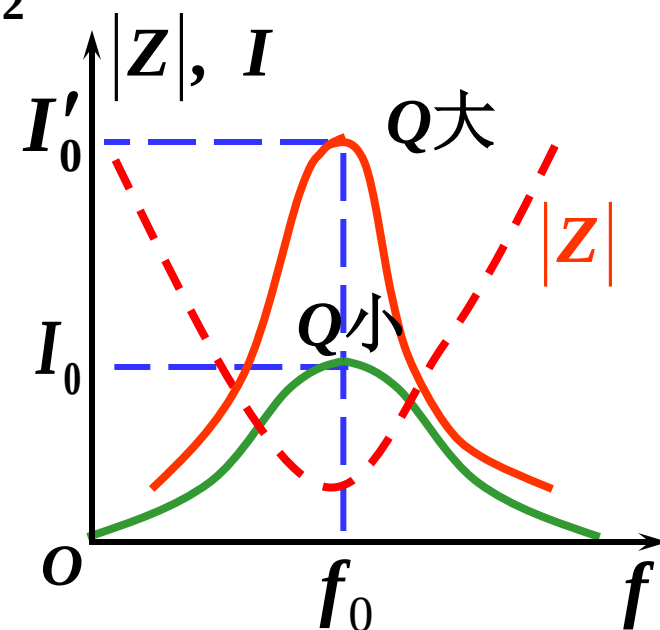
2) 谐振曲线

电流随频率变化的关系曲线。

$$I(\omega) = \frac{U}{|Z|} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

谐振电流 $I_0 = \frac{U}{R}$

分析: $R \downarrow \rightarrow \begin{cases} I_0 \uparrow \\ Q \uparrow = \frac{\omega_0 L}{R \downarrow} \end{cases}$



电路具有选择最接近谐振频率附近的电流的能力——称为**选择性**。 Q 值越大，曲线越尖锐，选择性越好。

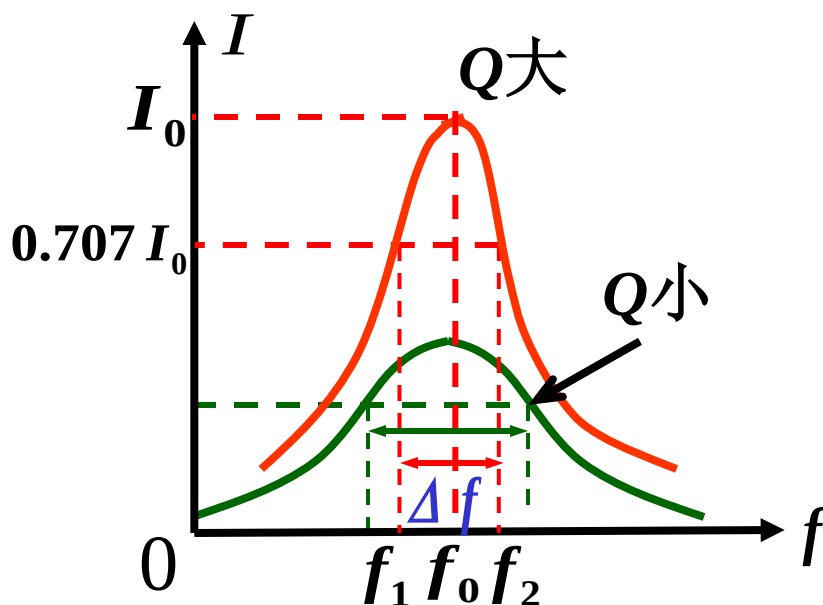
通频带:

当电流下降到 $0.707I_0$ 时所对应的上下限频率之差, 称**通频带**。即: $\Delta f = f_2 - f_1$

f_0 : 谐振频率

f_1 : 下限截止频率

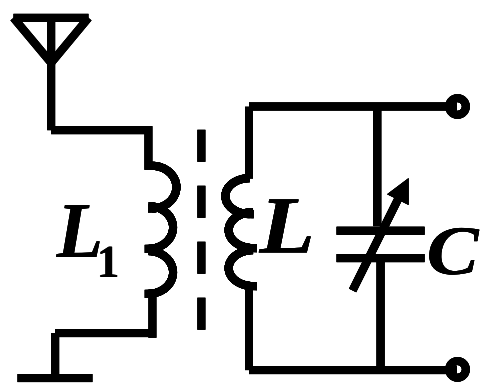
f_2 : 上限截止频率



通频带宽度越小(Q 值越大), 选择性越好, 抗干扰能力越强。

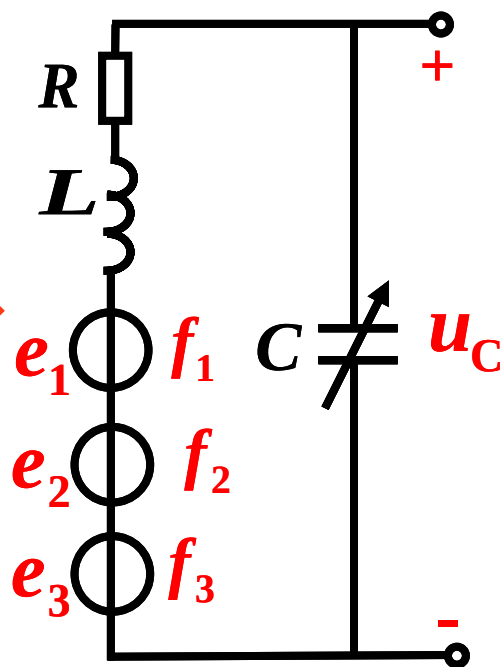
(5) 串联谐振应用举例

接收机的输入电路



电路图

$\begin{cases} L_1: & \text{接收天线} \\ LC: & \text{组成谐振电路} \end{cases}$



等效电路

调C, 对
所需信号
频率产生
串联谐振

则 $I_0 = I_{\max} \Rightarrow$

$U_C = QU_{\text{最大}}$

e_1 、 e_2 、 e_3 为来自3个不同电台(不同频率)的电动势信号;

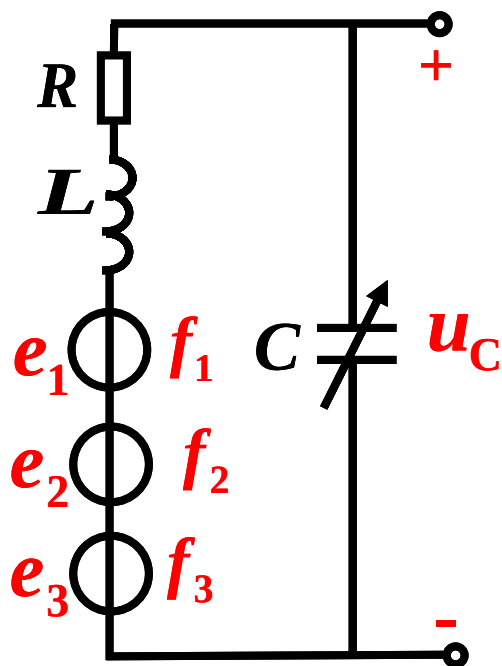
例1: (1) 若要收听 e_1 节目， C 应配多大？

已知： $L = 0.3\text{mH}$ 、 $R = 16\Omega$

$f_1 = 640\text{kHz}$

解： $f_0 = f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

则： $C = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L}$



$$C = \frac{1}{(2\pi \times 640 \times 10^3)^2 \times 0.3 \times 10^{-3}} = 204\text{pF}$$

结论：当 C 调到 204 pF 时，可收听到 e_1 的节目。

例1: (2) e_1 信号在电路中产生的电流有多大? 在 C 上产生的电压是多少?

已知: $E_1 = 2 \mu V$

解: 电路在 $f_1 = 640\text{kHz}$ 时产生谐振

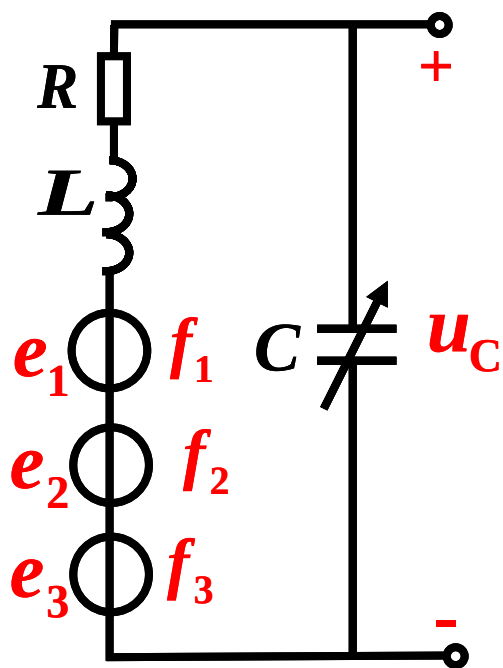
这时 $I = E_1 / 16 = 0.13 \mu A$

$$X_L = X_C = \omega L = 2\pi f_1 L = 1200 \Omega$$

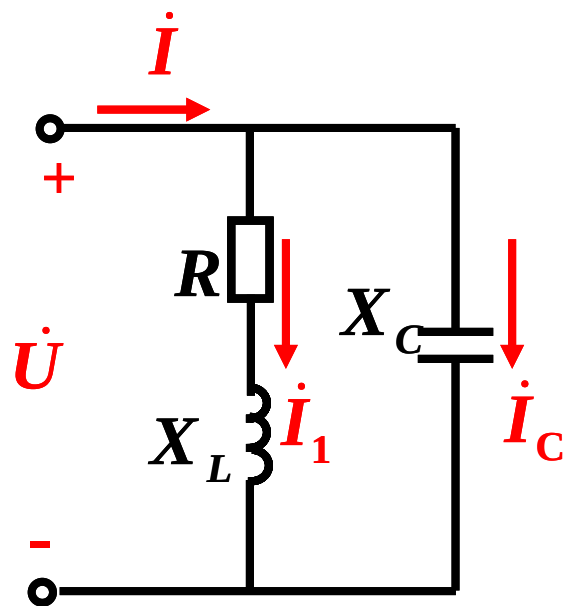
$$U_{C1} = IX_C = 156 \mu V$$

$$Q = \frac{U_{C1}}{E_1} = \frac{156}{2} = 78$$

所需信号被
放大了78倍



2. 并联谐振



(1) 谐振条件

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + (R + j\omega L)}$$

$$= \frac{R + j\omega L}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

实际中线圈的电阻很小，所以在谐振时有 $\omega_0 L \gg R$

则：

$$Z \approx \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = \frac{1}{RC/L + j(\omega C - 1/\omega L)}$$

(1) 谐振条件

$$\text{由: } Z \approx \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = \frac{1}{RC/L + j(\omega C - 1/\omega L)}$$

可得出: 谐振条件: $\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} \approx 0$

(2) 谐振频率

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{或}$$

$$f = f_0 \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

(3) 并联谐振的特征

1) 阻抗最大, 呈电阻性 $|Z_0| = \frac{L}{RC}$
(当满足 $\omega_0 L \gg R$ 时)

2) 恒压源供电时，总电流最小。

$$I = I_0 = \frac{U}{\frac{L}{RC}} = \frac{U}{|Z_0|}$$

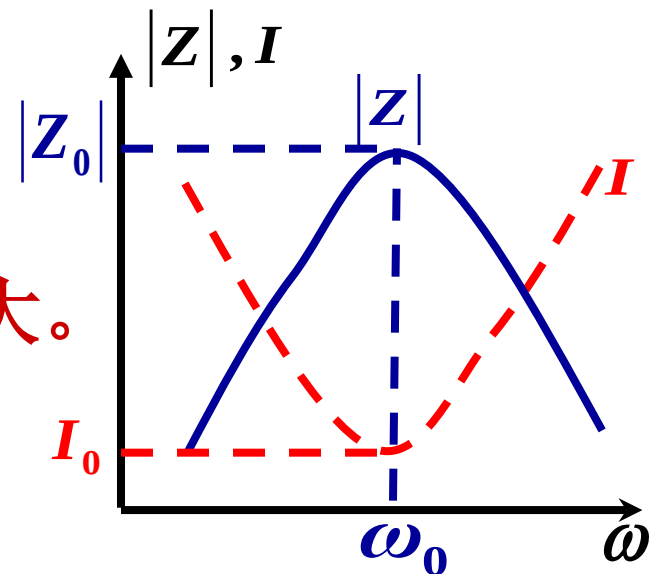
恒流源供电时，电路的端电压最大。

$$U = I_s |Z_0|$$

3) 支路电流与总电流 的关系

当 $\omega_0 L \gg R$ 时，

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (2\pi f_0 L)^2}} \approx \frac{U}{2\pi f_0 L}$$

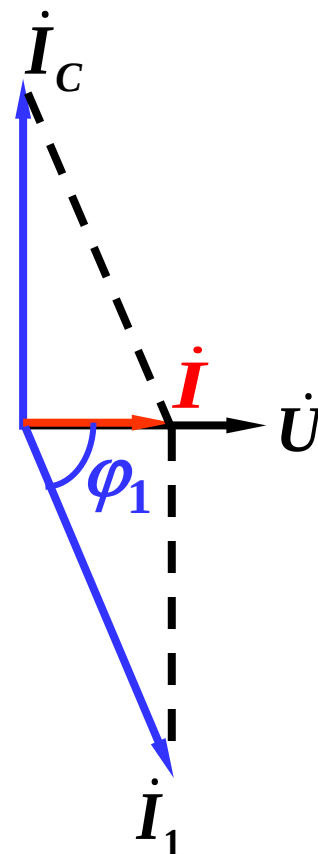


$$I_C = \frac{U}{\frac{1}{2\pi f_0 C}} = U \cdot 2\pi f_0 C$$

$$\begin{aligned} \frac{I_C}{I_0} &= \frac{U(2\pi f_0 C)}{U/|Z_0|} = \frac{U(2\pi f_0 C)}{U/\frac{L}{RC}} \\ &= \frac{2\pi f_0 L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = Q \end{aligned}$$

$$\therefore I_1 \approx I_C = QI_0$$

相量图



支路电流是总电流的 Q 倍——电流谐振

例2: 已知: $L = 0.25 \text{ mH}$ 、 $R = 25\Omega$ 、 $C = 85\text{pF}$

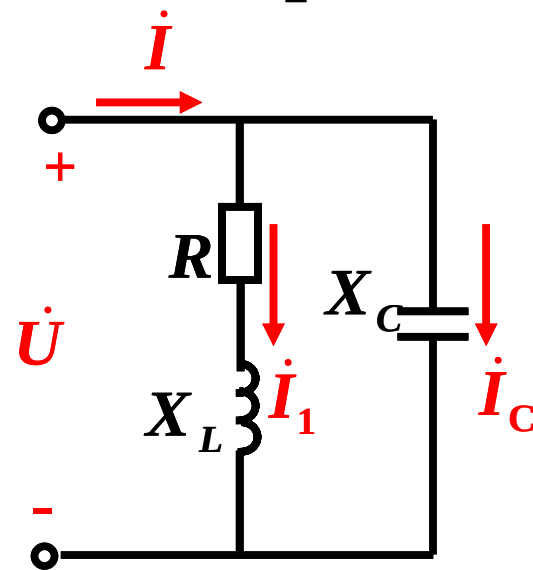
试求: ω_0 、 Q 、 $|Z_0|$ 。

解:

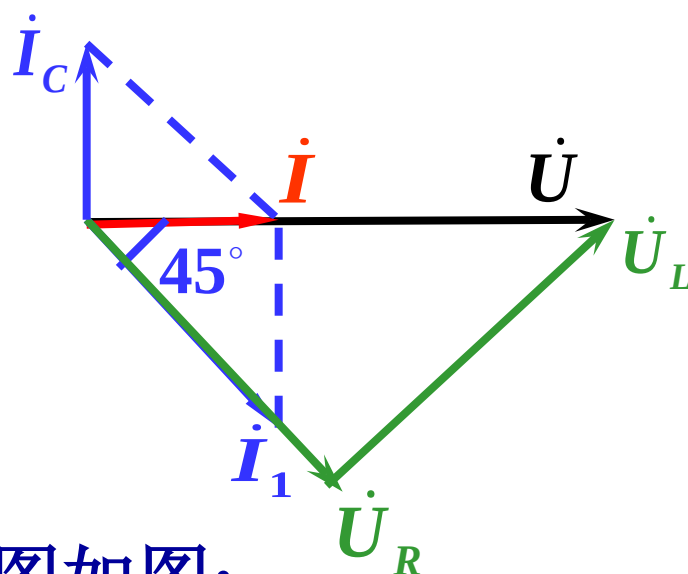
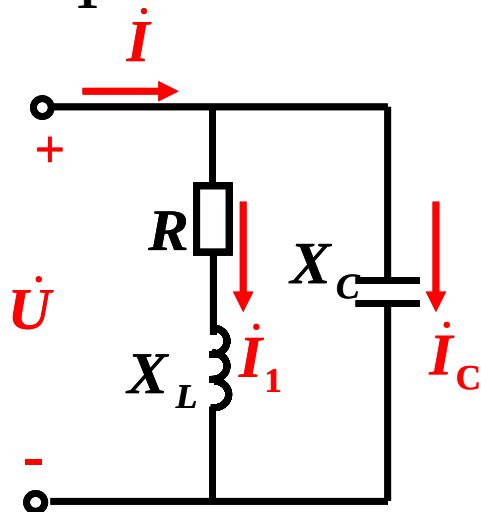
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.25 \times 85 \times 10^{-15}}} = 6.86 \times 10^6 \text{ rad/s}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{6.86 \times 10^6 \times 0.25 \times 10^{-3}}{25} = 68.6$$

$$|Z_0| = \frac{L}{RC} = \frac{0.25 \times 10^{-3}}{25 \times 85 \times 10^{-12}} = 117 \text{ k}\Omega$$



例3: 电路如图：已知 $R=10\ \Omega$ 、 $I_C=1\text{A}$ 、 $\varphi_1=45^\circ$ ($\dot{U}, \dot{I}_1$ 间的相位角)、 $f=50\text{Hz}$ 、电路处于谐振状态。试计算 I 、 I_1 、 U 、 L 、 C 之值，并画相量图。



解：(1) 利用相量图求解 相量图如图：

由相量图可知电路谐振，则： $I_1 \sin \varphi_1 = I_C$ 因为 $I_C = 1\text{A}$

$$\text{所以 } I_1 = \frac{I_C}{\sin 45^\circ} = 1.414 = \sqrt{2}\text{A} \quad I = I_C = 1\text{A}$$

例3: 又: $\varphi_1 = 45^\circ$ 、 $R = 10\Omega$

$$\text{所以 } X_L = R = 10 \Omega \quad L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{10}{314} \text{ H} = 0.0318 \text{ H}$$

$$\text{所以 } U = I_1 \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{2} \times 10 \sqrt{2} \text{ V} = 20 \text{ V}$$

$$X_C = \frac{U}{I_2} = \frac{20}{1} \Omega = 20 \Omega \quad \text{所以 } C = \frac{1}{2\pi f X_C} = 159 \mu\text{f}$$

(2) 用相量法求解

$$\text{设: } \dot{U} = U \angle 0^\circ \text{ V} \quad \text{则: } \dot{I}_C = 1 \angle 90^\circ \text{ A}$$

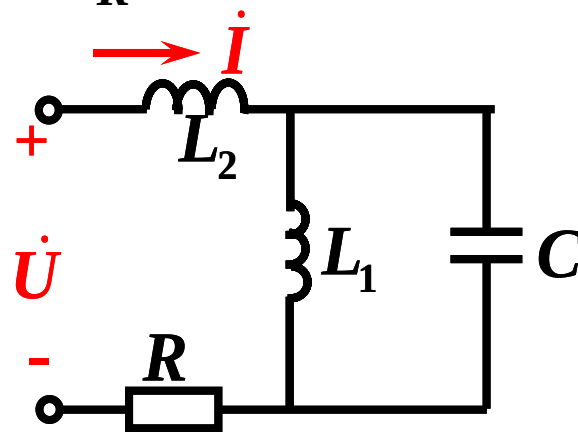
$$\text{因为 } \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_C$$

$$\text{所以 } \underline{I \angle 0^\circ} = \underline{I_1 \angle -45^\circ} + \underline{1 \angle 90^\circ} \text{ A}$$

例4: 图示电路中 $U=220\text{V}$, $C = 1\mu\text{F}$

(1) 当电源频率 $\omega_1 = 1000\text{rad/s}$ 时, $U_R = 0$

(2) 当电源频率 $\omega_2 = 2000\text{rad/s}$ 时, $U_R = U$, 试求电路的参数 L_1 和 L_2 。



解: (1) 因为 $U_R = 0$ 即: $I = 0$

所以 $L_1 C$ 并联电路产生谐振,

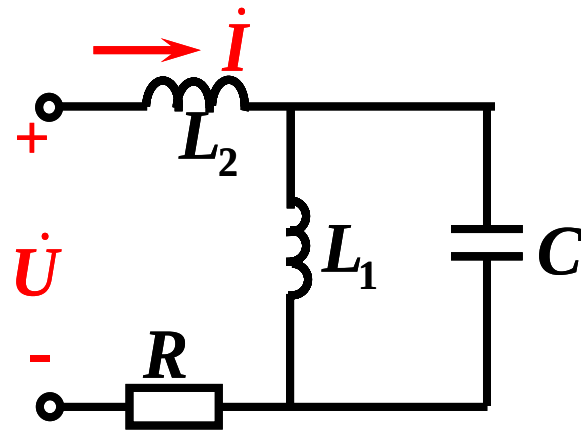
$$\text{即: } |Z_0| = \frac{L_1}{R_1 C} \rightarrow \infty \quad \text{故: } \omega_1 L_1 = \frac{1}{\omega_1 C}$$

$$\text{所以 } L_1 = \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{1000^2 \times 1 \times 10^{-6}} \text{ H} = 1\text{H}$$

(2) 因为 $U_R = U$ ，所以电路产生串联谐振，

L_1C 并联电路的等效阻抗为：

$$Z_1 = \frac{\frac{1}{j\omega_2 C} (j\omega_2 L_1)}{\frac{1}{j\omega_2 C} + (j\omega_2 L_1)} = -j \frac{\omega_2 L_1}{\omega_2^2 L_1 C - 1}$$



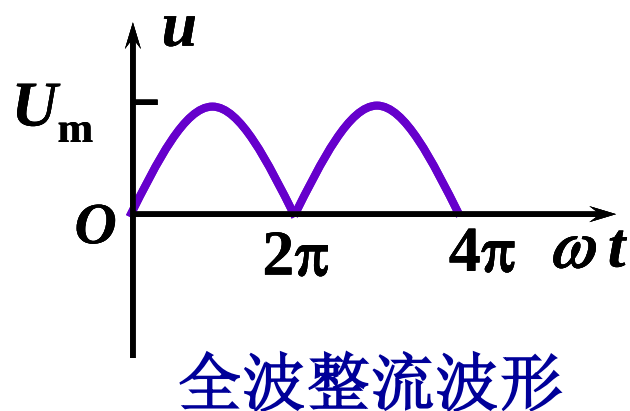
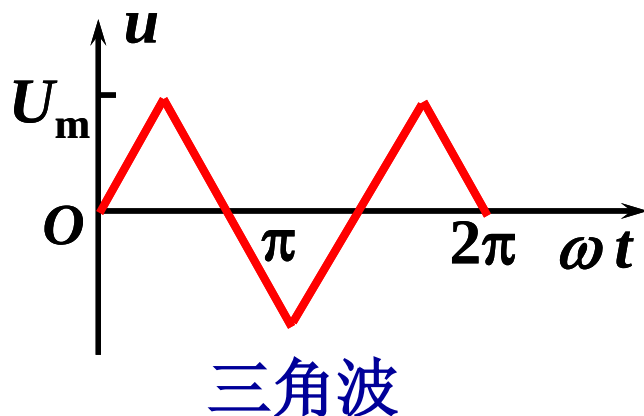
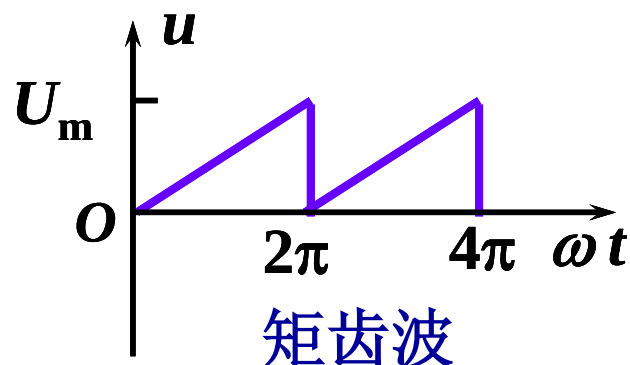
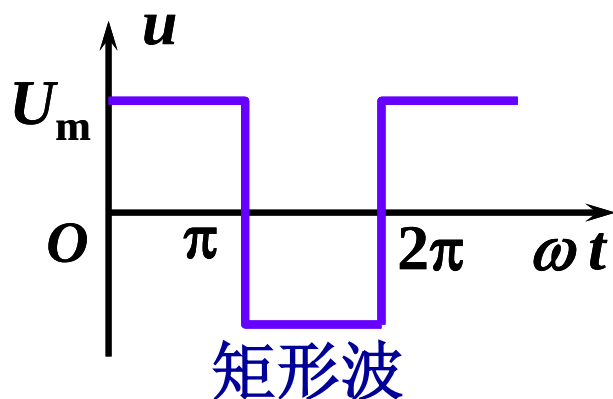
$$\text{总阻抗 } Z = R + j\omega_2 L_2 + Z_1 = R + j\left(\omega_2 L_2 - \frac{\omega_2 L_1}{\omega_2^2 L_1 C - 1}\right)$$

串联谐振时，阻抗 Z 虚部为零，可得

$$L_2 = \frac{1}{\omega_2^2 C - 1/L_1} = \frac{1}{2000^2 \times 1 \times 10^{-6} - 1} \text{ H} = 0.33 \text{ H}$$

非正弦周期电压和电流

正弦交流电路中的电压和电流都是正弦量。但在实际的应用中，常常会遇到非正弦周期的电压或电流。



1. 非正弦周期量的分解

设周期函数为 $f(\omega t)$ ，且满足狄里赫利条件，则可以分解为下列傅里叶级数：

$$f(\omega t) = A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \cdots$$
$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$$

直流分量

高次谐波

基波（或
一次谐波）

二次谐波
（2倍频）

2. 几种非正弦周期电压的傅里叶级数的展开式

矩形波电压 $u = \frac{4U_m}{\pi} (\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \cdots)$

矩齿波电压 $u = U_m (\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sin \omega t - \frac{1}{2\pi} \sin 2\omega t - \frac{1}{3\pi} \sin 3\omega t - \cdots)$

三角波电压 $u = \frac{8U_m}{\pi^2} (\sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \dots)$

全波整流电压

$$u = \frac{2U_m}{\pi} (1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \dots)$$

从上面几个式子可以看出列傅里叶级数具有收敛性。

3. 非正弦周期电流 i 的有效值

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

计算可得 $I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots}$

式中 $I_1 = \frac{I_{1m}}{\sqrt{2}} \quad I_2 = \frac{I_{2m}}{\sqrt{2}}$

结论：周期函数的有效值为直流分量及各次谐波分量有效值平方和的方根。

同理，非正弦周期电压 u 的有效值为

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \cdots}$$

例1: 一可控半波整流电压，在 $\frac{\pi}{3} \sim \pi$ 之间是正弦电压，求其平均值和有效值。

解：平均值 $U_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} u d(\omega t)$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 10 \sin \omega t d(\omega t) = 2.39 \text{ V}$$

有效值 $U = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} u^2 d(\omega t)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 10^2 \sin^2 \omega t d(\omega t)} \text{ V}$

$$= 4.49 \text{ V}$$

4. 非正弦周期电流电路中的平均功率

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i dt$$

设非正弦周期电压和电流如下

$$\begin{cases} u(\omega t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) \\ i(\omega t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) \end{cases}$$

利用三角函数的正交性，整理得

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = P_0 + P_1 + P_2 + \dots$$

结论： $P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots$

交流电路的频率特性

前面几节讨论的电压与电流都是时间的函数，在时间领域内对电路进行分析，称为**时域分析**。本节是在频率领域内对电路进行分析，称为**频域分析**。

当电源电压或电流（激励）的频率改变时，容抗和感抗随之改变，从而使电路中产生的电压和电流（响应）的大小和相位也随之改变。

频率特性或频率响应：

研究响应与频率的关系

幅频特性：电压或电流的大小与频率的关系。

相频特性：电压或电流的相位与频率的关系。

RC滤波电路的频率特性

滤波：即利用容抗或感抗随频率而改变的特性，对不同频率的输入信号产生不同的响应，让需要的某一频带的信号通过，抑制不需要的其它频率的信号。

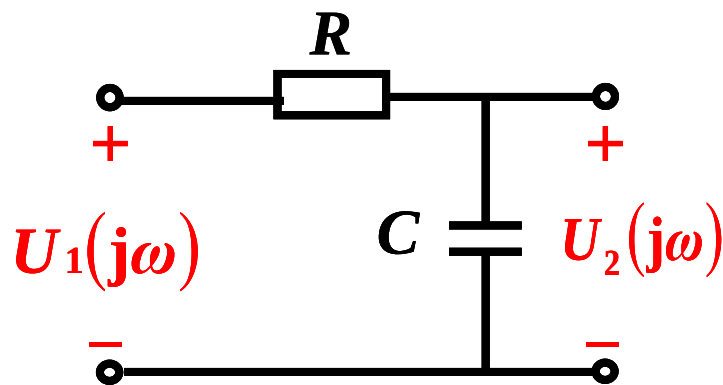
滤波电路主要有：

低通滤波器、高通滤波器、带通滤波器等。

1. 低通滤波电路

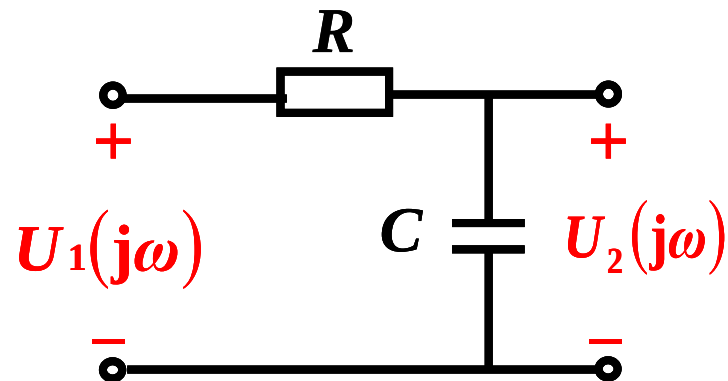
(1) 电路

$U_1(j\omega)$ 输入信号电压
 $U_2(j\omega)$ 输出信号电压 } 均为频率的函数



(2) 传递函数(转移函数)

电路输出电压与输入电压的比值。



$$T(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$\text{设: } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$\begin{aligned} \text{则: } T(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \angle -\arctan \frac{\omega}{\omega_0} \\ &= |T(j\omega)| \underline{\angle \varphi(\omega)} \end{aligned}$$

频率特性

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \angle -\arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

幅频特性: $|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$

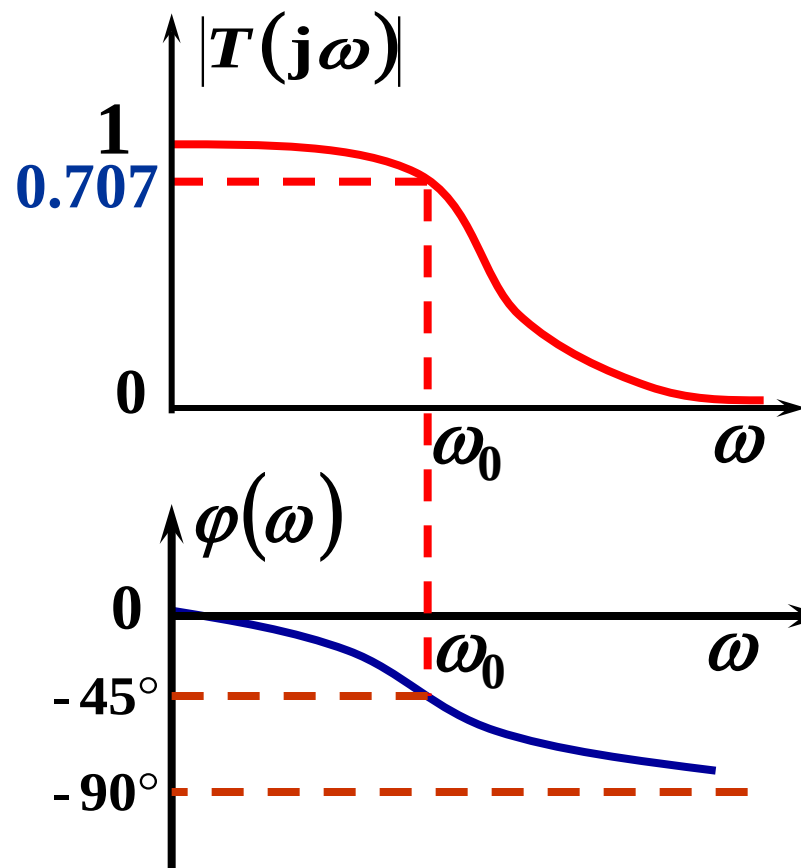
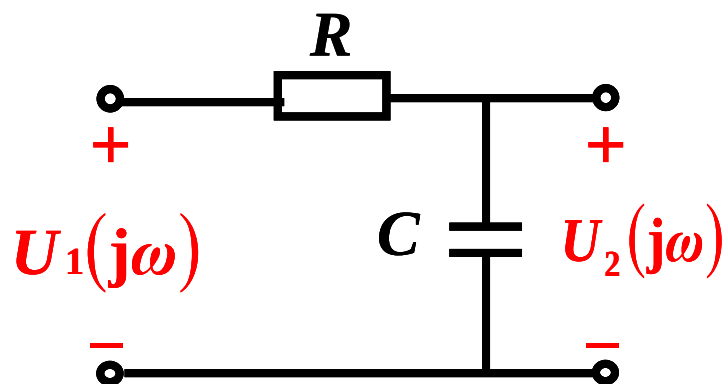
相频特性: $\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0}$

(3) 特性曲线

ω	0	ω_0	∞
$ T(j\omega) $	1	0.707	0
$\varphi(\omega)$	0°	-45°	-90°

频率特性曲线

ω	0	ω_0	∞
$ T(j\omega) $	1	0.707	0
$\varphi(\omega)$	0°	-45°	-90°

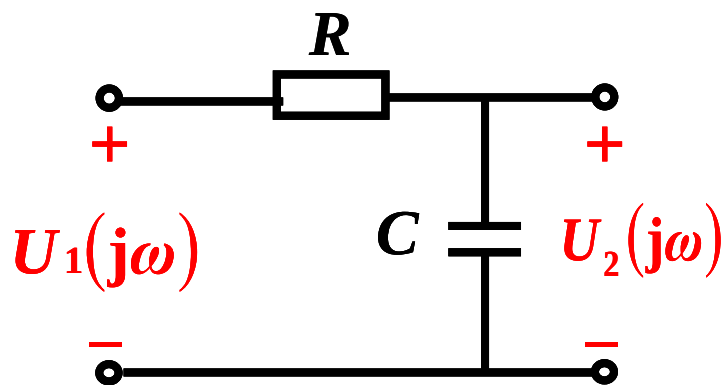


当 $\omega < \omega_0$ 时, $|T(j\omega)|$ 变化不大接近等于 1;

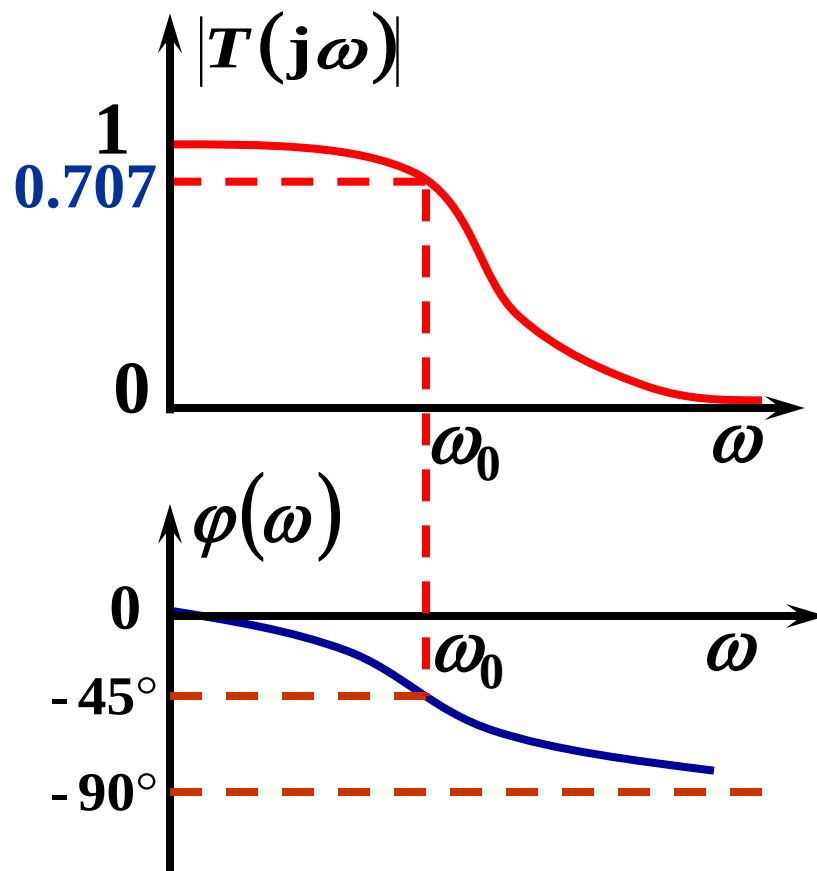
当 $\omega > \omega_0$ 时, $|T(j\omega)|$ 明显下降, 信号衰减较大。

一阶 RC 低通滤波器具有低通滤波特性

频率特性曲线



通频带: $0 < \omega \leq \omega_0$
截止频率: $\omega_0 = 1/RC$



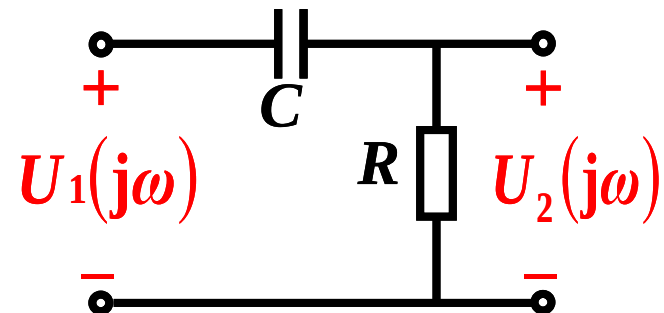
通频带:

把 $0 < \omega \leq \omega_0$ 的频率范围称为低通滤波电路的通频带。
 ω_0 称为截止频率 (或半功率点频率、3dB 频率)。

2. RC高通滤波电路

(1) 电路

(2) 频率特性(转移函数)



$$T(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega RC}}$$

幅频特性: $|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$

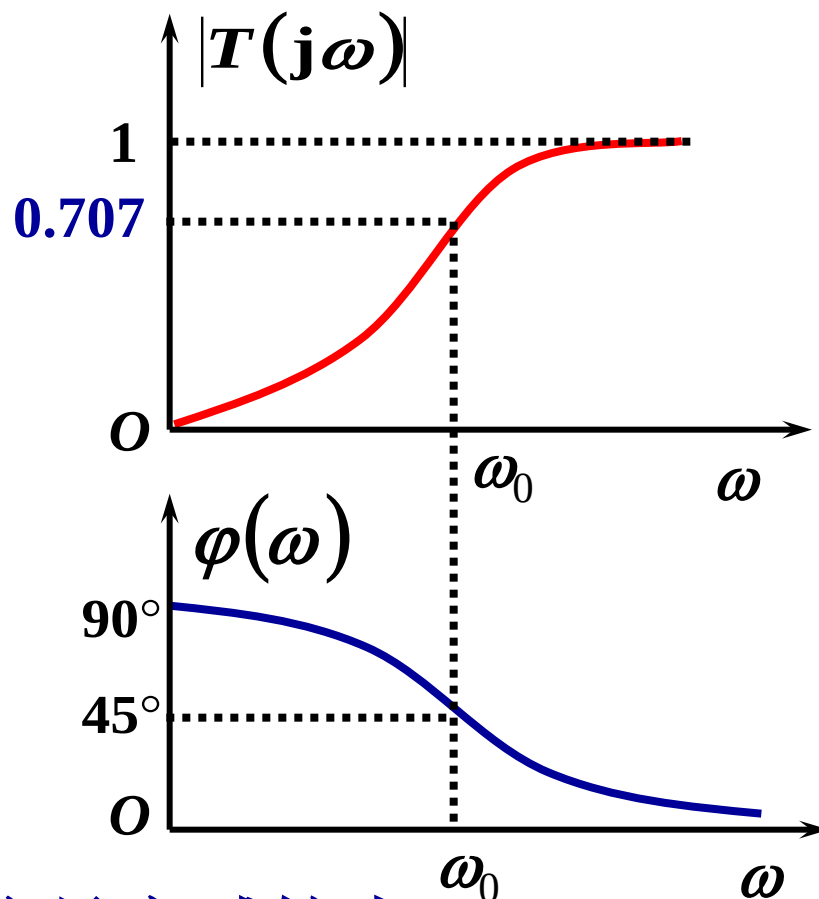
相频特性: $\varphi(\omega) = \arctan \frac{1}{\omega RC} = \arctan \frac{\omega_0}{\omega}$

(3) 频率特性曲线

ω	0	ω_0	∞
$ T(j\omega) $	0	0.707	1
$\varphi(\omega)$	90°	45°	0°

通频带： $\omega_0 \leq \omega < \infty$

截止频率： $\omega_0 = 1/RC$



当 $\omega < \omega_0$ 时, $|T(j\omega)|$ 较小, 信号衰减较大;
 当 $\omega > \omega_0$ 时, $|T(j\omega)|$ 变化不大, 接近等于1。

一阶RC高通滤波器具有高通滤波特性

3. RC带通滤波电路

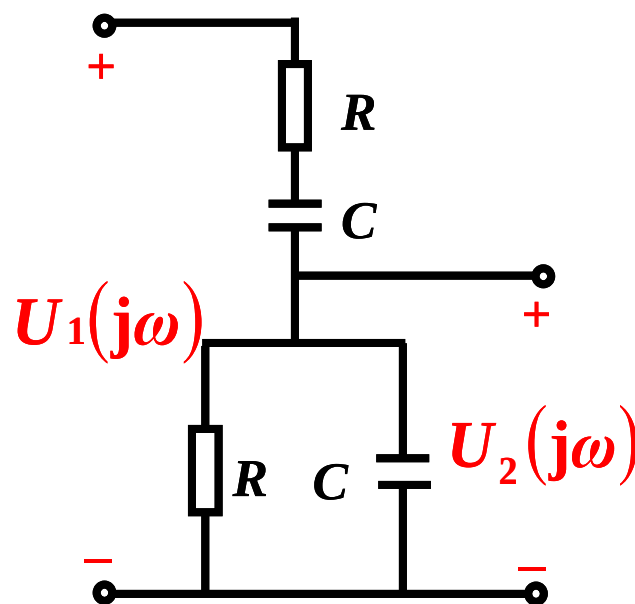
(1) 电路

$U_1(j\omega)$ 输入信号电压

$U_2(j\omega)$ 输出信号电压

(2) 传递函数

$$T(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{\frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}}{R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}} = \frac{1}{3 + j(\omega RC - \frac{1}{\omega RC})}$$



频率特性 设: $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

$$T(j\omega) = \frac{1}{3 + j(\omega RC - \frac{1}{\omega RC})} = \frac{1}{3 + j(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3^2 + (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}} \angle -\arctan \frac{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}{3}$$

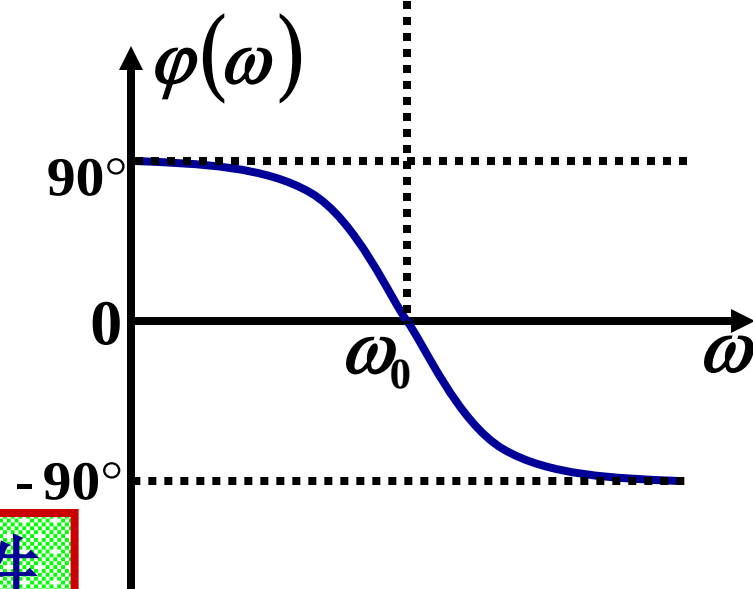
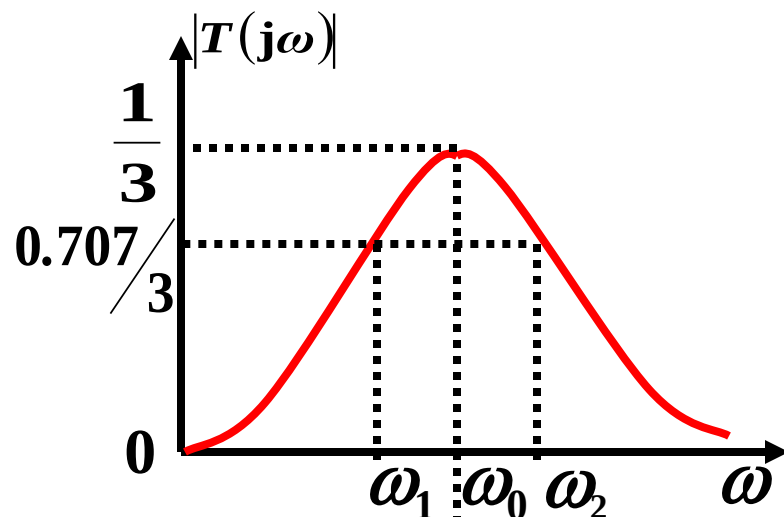
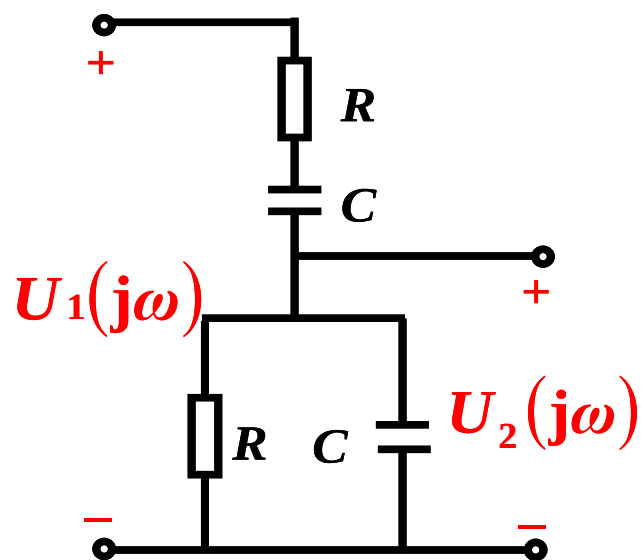
幅频特性: $|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{3^2 + (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}}$

相频特性:

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}{3}$$

(3) 频率特性曲线

ω	0	ω_0	∞
$ T(j\omega) $	0	1/3	0
$\varphi(\omega)$	90°	0°	-90°



RC串并联电路具有带通滤波特性

由频率特性可知

在 $\omega = \omega_0$ 频率附近, $|T(j\omega)|$ 变化不大, 接近等于 $1/3$;

当 ω 偏离 ω_0 时, $|T(j\omega)|$ 明显下降, 信号衰减较大。

通频带: 当输出电压下降到输入电压的70.7%处,
($|T(j\omega)|$ 下降到 $0.707/3$ 时), 所对应的上下限频率之差
即: $\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1)$

仅当 $\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}$ 时, $\dot{U}_1$ 与 $\dot{U}_2$ 同相, $U_2 = U_1/3$ 为最大值, 对其它频率不会产生这样的结果。因此该电路具有选频作用。常用于正弦波振荡器。

